2020年度　　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　80分〕

Y 2　　　数　　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより12ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

1 次の $\boxed{}$ 内のアからフにあてはまる 0 から 9 までの整数を求めて，**解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。**ただし，$\boxed{\,\vdots\,}$，$\boxed{\,\vdots\,\,\vdots\,}$ はそれぞれ 2 桁，3 桁の数を表すものとする。根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小になる形で答えなさい。また，分数は既約分数として表すものとする。

(16 点)

座標空間に平行六面体 ABCD − EFGH があり，

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \ \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

とする。辺 BA, AD, DH, HG, GF, FB の中点をそれぞれ，P, Q, R, S, T, U とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a} + \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b},\ \ \overrightarrow{\mathrm{PU}} = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a} + \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boxed{ケ}\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \boxed{コ}\,\overrightarrow{\mathrm{PU}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \boxed{サ}\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \boxed{シ}\,\overrightarrow{\mathrm{PU}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = \boxed{ス}\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \boxed{セ}\,\overrightarrow{\mathrm{PU}}$$

である。したがって， 点 P, Q, R, S, T, U は同じ平面上にある。

さて，A$(1, 0, 0)$, B$(-1, -2, 0)$, C$(2, -2, 0)$, D$(4, 0, 0)$, E$(0, -1, -1)$, F$(-2, -3, -1)$, G$(1, -3, -1)$, H$(3, -1, -1)$ とするとき，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PU}}\right| = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\sqrt{\boxed{チ\,\vdots\,ツ}},\ \ \left|\overrightarrow{\mathrm{PT}}\right| = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\sqrt{\boxed{ナ\,\vdots\,ニ}},\ \ \left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right| = \sqrt{\boxed{ヌ}}$$

であり，六角形 PQRSTU の面積は，$\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\sqrt{\boxed{ハ\,\vdots\,ヒ\,\vdots\,フ}}$ である。

（下書き用紙）

$\boxed{2}$ 次の $\boxed{}$ 内のヘからレにあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，$\boxed{\vdots}$ は2桁の数を表すものとする。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小になる形で答えなさい。

(16点)

座標平面上で，2点 $(5,0), (9,4\sqrt{3})$ をそれぞれ A, B とし，楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{18}=1$ を C で表す。

(1) 点 A，B を通る直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は，

$$y=\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}\,x-\boxed{\text{ホ}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}$$

であり，ℓ と平行で C と接する直線は2つあり，それらの方程式は，

$$y=\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}\,x-\boxed{\text{ム}}\sqrt{\boxed{\text{メ}}}$$

と

$$y=\sqrt{\boxed{\text{モ}}}\,x+\boxed{\text{ヤ}}\sqrt{\boxed{\text{ユ}}}$$

である。

(2) 点 K が C 上を動くとき，三角形 ABK の面積の最小値は，$\boxed{\text{ヨ}}\sqrt{\boxed{\text{ラ}}}$ で，最大値は，$\boxed{\text{リ}\,\vdots\,\text{ル}}\sqrt{\boxed{\text{レ}}}$ である。

（下書き用紙）

3 次の $\boxed{}$ 内のロからン，あからおにあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。また，分数は既約分数として表すものとする。なお，$\boxed{ア}$ などが2度現れる場合，2度目は $\boxed{ア}$ などのように網掛けで表記する。

(18点)

$n=1, 2, 3$ に対して，複素数 z_n を $z_n=\cos\dfrac{2}{7}n\pi+i\sin\dfrac{2}{7}n\pi$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) $z_n^7=\boxed{ロ}$，$z_n^6+z_n^5+z_n^4+z_n^3+z_n^2+z_n+1=\boxed{ワ}$ である。

(2) $x_n=z_n+\dfrac{1}{z_n}$ とするとき，

$$x_n^3+x_n^2-2x_n=\boxed{ヲ}$$

である。

(3) x_1, x_2, x_3 を (2) で定義したものとする。x_1, x_2, x_3 は x の3次方程式

$$x^3+x^2-2x-\boxed{ヲ}=0$$

の解となるので，因数定理から等式

$$x^3+x^2-2x-\boxed{ヲ}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

が成り立つ。この等式は x についての恒等式なので，

$$x_1+x_2+x_3=-\boxed{ン},\quad x_1x_2x_3=\boxed{あ}$$

となる。さらに，

$$\alpha=\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi,\quad \beta=\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{6}{7}\pi$$

とすると，

$$\alpha=-\frac{\boxed{い}}{\boxed{う}},\quad \beta=\frac{\boxed{え}}{\boxed{お}}$$

となる。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{4}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{4}$ 自然数 m, n に対して，$I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx$ と定める。次の問いに答えよ。

(25 点)

(1) 関数 $y = \sin^3 x$ を微分せよ。

(2) $I_{1,n} = \dfrac{1}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ となることを証明せよ。

(3) 自然数 p に対して，

$$I_{2p-1,n} = \frac{2^{p-1}(p-1)!}{(n+1)(n+3)(n+5)\cdots\cdots(n+2p-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし，$0! = 1$ とする。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^4 I_{7,n}$ を求めよ。

(5) $J_q = I_{2q-1,49-2q}$ $(q = 1, 2, 3, \cdots\cdots, 24)$ とする。J_q が最小となる q を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{5}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{5}$ a, b, c を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(25 点)

(1) $s = a + b$, $t = b + c$, $u = c + a$ とするとき， $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$ を s, t, u を用いて表せ。

(2) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ が成り立つとき，$a = b = c$ となることを証明せよ。

(3) $a + b + c \fallingdotseq 0$ かつ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ が成り立つとき，$a = b = c$ となることを証明せよ。

(4) $6(a^2 + 2b^2 + 3c^2) = (a + 2b + 3c)^2$ が成り立つとき，$a = b = c$ となることを証明せよ。

(5) $(a^6b^6 + b^3c^3 + ca)^2 = (a^{12} + b^6 + c^2)(b^{12} + c^6 + a^2)$ が成り立つとき，$a = b = c$ となることを証明せよ。