2020年度　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100分〕

Ｙ１　　数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより14ページまであります。

〔注　　意〕

(1)　試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2)　監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3)　解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4)　解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤　解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5)　試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6)　問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

1 次の $\boxed{}$ 内のアからケにあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，$\boxed{\,\vdots\,}$，$\boxed{\,\vdots\,\,\vdots\,}$ はそれぞれ2桁，3桁の数を表すものとする。なお，$\boxed{\text{ア}}$ などが2度現れる場合，2度目は $\boxed{\text{ア}}$ などのように網掛けで表記する。

(15点)

n，a，b を正の整数とし，以下の2つの等式

$$n + 50 = a^2, \quad n - 50 = b^2$$

を満たすとする。

(1) $(a+b)(a-b) = \boxed{\text{ア}\,\vdots\,\text{イ}\,\vdots\,\text{ウ}}$ である。

(2) $\boxed{\text{ア}\,\vdots\,\text{イ}\,\vdots\,\text{ウ}}$ の正の約数の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $a = \boxed{\text{オ}\,\vdots\,\text{カ}}$，$b = \boxed{\text{キ}\,\vdots\,\text{ク}}$ である。

(4) n^{2020} を5で割った余りは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

（下書き用紙）

$\boxed{2}$ 次の $\boxed{}$ 内のコからミにあてはまる 0 から 9 までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，$\boxed{\,\vdots\,}$，$\boxed{\,\vdots\,\,\vdots\,}$ はそれぞれ 2 桁，3 桁の数を表すものとし，分数は既約分数として表すものとする。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小になる形で答えなさい。

(20 点)

座標平面上で，曲線 $y = \dfrac{2}{x^2}$ を C とし，C 上の点 P の座標を $\left(t, \dfrac{2}{t^2}\right)$ とする。ただし，$t > 0$ とする。点 P における C の接線を ℓ_1 とし，ℓ_1 と直交し原点 O を通る直線を ℓ_2 とする。また，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を Q とする。

(1) $t = 1$ のとき，ℓ_1 の方程式は $y = -\boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}}$ であり，点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}\,\vdots\,\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}\,\vdots\,\text{ソ}}}, \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}\,\vdots\,\text{ツ}}}\right)$ である。

(2) 点 Q の座標を t を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{テ}\,\vdots\,\text{ト}}\,t}{t^6 + \boxed{\text{ナ}\,\vdots\,\text{ニ}}}, \frac{\boxed{\text{ヌ}}\,t^4}{t^6 + \boxed{\text{ネ}\,\vdots\,\text{ノ}}}\right)$$

となる。

(3) 原点 O と点 Q との距離を OQ とし，$\mathrm{OQ}^2 = f(t)$ と表す。$f'(t)$ を $f(t)$ の導関数とすると，

$$f'(t) = \frac{-\boxed{\text{ハ}\,\vdots\,\text{ヒ}\,\vdots\,\text{フ}}\,t(t^6 - \boxed{\text{ヘ}})}{(t^6 + \boxed{\text{ホ}\,\vdots\,\text{マ}})^2}$$

となる。よって，$t > 0$ において，関数 $f(t)$ は $t = \sqrt{\boxed{\text{ミ}}}$ で極大値をとる。

（下書き用紙）

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{}$ 内のムからリにあてはまる 0 から 9 までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表すものとする。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小になる形で答えなさい。

(16 点)

空間の 3 つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。ただし，それらの大きさはそれぞれ 1 であるとする。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。

実数 t が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，$\left|\vec{a} + (\sin t)\vec{b} + (\cos t)\vec{c}\right|^2$ は $t = \dfrac{\boxed{ム}}{\boxed{メ}}\pi$ で最小値 $\boxed{モ} - \sqrt{\boxed{ヤ}}$ をとり，$t = \dfrac{\boxed{ユ}}{\boxed{ヨ}}\pi$ で最大値 $\boxed{ラ} + \sqrt{\boxed{リ}}$ をとる。

（下書き用紙）

4 次の$\boxed{}$内のルからン，あからうにあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，$\boxed{\,\vdots\,}$は2桁の数を表すものとし，分数は既約分数として表すものとする。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小になる形で答えなさい。

(16点)

i を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上で，3 つの複素数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$，$z_3 = 3 + i$ が表す点をそれぞれ A，B，C とする。一般に，複素数平面上の異なる 3 つの点 D，E，F に対し，反時計回りを正の向きとして，線分 DE を点 D を中心に線分 DF に重なるまで回転した角を ∠EDF で表すことにする。ただし，$0 \leqq \angle\mathrm{EDF} < 2\pi$ とする。

(1) $z_1z_2 = \boxed{\text{ル}} + \boxed{\text{レ}}\,i$，$z_1z_2z_3 = \boxed{\text{ロ}} + \boxed{\text{ワ}\,\vdots\,\text{ヲ}}\,i$ である。

(2) 実数 t は $0 \leqq t \leqq 3$ を満たし，t が表す実軸上の点を P とする。ただし，$\angle\mathrm{CPA} = \dfrac{\pi}{4}$ である。このとき，$t = \boxed{\text{ン}} - \sqrt{\boxed{\text{あ}}}$ である。

(3) 点 P を (2) で定めたものとする。このとき，

$$\angle\mathrm{POA} + \angle\mathrm{POB} + \angle\mathrm{POC} + \angle\mathrm{CPA} = \frac{\boxed{\text{い}}}{\boxed{\text{う}}}\pi$$

が成り立つ。

（下書き用紙）

5 次の$\boxed{}$内の **え** から **ね** にあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，$\boxed{\vdots\vdots\vdots}$ は4桁の数を表すものとする。

(15点)

n を正の整数とし，次の等式 (A)

$$x^{n+1} = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n \qquad \cdots\cdots \text{(A)}$$

が実数 x についての恒等式となるような整式 $Q_n(x)$，整数の定数 a_n，b_n，c_n を考える。

(1) 3次方程式 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ が $\boxed{\text{え}}$ を解にもつので，(A) より，

$$\boxed{\text{お}}^{\,n+1} = \boxed{\text{か}}\,a_n + \boxed{\text{き}}\,b_n + \boxed{\text{く}}\,c_n \qquad \cdots\cdots \text{(B)}$$

が成り立つ。ただし，(B) の両辺は0でないものとする。

(2) (A) の両辺をそれぞれ x の関数と考え，x について微分することを利用すると，a_n，b_n，c_n がそれぞれ求められる。よって，

$$\begin{aligned} a_{100} &= \boxed{\text{け}}^{\,100} \cdot \boxed{\text{こ}\vdots\text{さ}\vdots\text{し}\vdots\text{す}}, \\ b_{100} &= -\boxed{\text{せ}}^{\,100} \cdot \boxed{\text{そ}\vdots\text{た}\vdots\text{ち}\vdots\text{つ}}, \\ c_{100} &= \boxed{\text{て}}^{\,100} \cdot \boxed{\text{と}\vdots\text{な}\vdots\text{に}\vdots\text{ぬ}} \end{aligned}$$

となる。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n - c_n}{a_n}\right| = \boxed{\text{ね}}$ が成り立つ。

（下書き用紙）

6 次の$\boxed{}$内ののからめにあてはまる0から9までの整数を求めて，解答用マークシートの指定された行にあるその数をマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表すものとする。

(18点)

a，bを実数とする。座標平面上で，曲線$y = x^2 + 2x - 3$をC_1とし，曲線$y = (x+a)^2 + b$をC_2とする。C_2は2点$\mathrm{A}(1, 9)$と$\mathrm{B}(5, 17)$を通る。また，直線ℓはC_1とC_2の両方に接しているとする。

(1) $a = -\boxed{の}$，$b = \boxed{は}$である。また，C_1とC_2の交点のx座標は$\dfrac{\boxed{ひ}}{\boxed{ふ}}$である。

(2) 直線ℓの方程式は$y = \boxed{へ}x - \boxed{ほ}$である。また，$C_1$と$\ell$との接点の$x$座標は$\boxed{ま}$であり，$C_2$と$\ell$との接点の$x$座標は$\boxed{み}$である。

(3) 2つの曲線C_1，C_2と直線ℓによって囲まれた部分の面積は$\dfrac{\boxed{む}}{\boxed{め}}$である。