2020年度 〔試験時間　100分〕

D 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより12ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の (1), (2), (3) においては, $\boxed{}$ 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 として, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 以下の定積分の値を求めなさい。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表わす。

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{2}\sin x + \cos x}\,dx = \log\left(\boxed{ア} - \sqrt{\boxed{イ}}\right)$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}\boxed{オ}}\pi + \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\log\left(\boxed{ク} - \sqrt{\boxed{ケ}}\right)$$

(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}\boxed{シ}}\pi - \frac{\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\log\left(\boxed{ソ} - \sqrt{\boxed{タ}}\right)$$

（下書き用紙）

(2)　1 から 6 の目が等しい確率で出るさいころを n 回続けて投げる。これら n 回の試行で出た目を値の小さいものから順に並べて，X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。例えば $n=4$ のとき，出た目が 2，5，1，2 であった場合，$X_1=1$，$X_2=2$，$X_3=2$，$X_4=5$ となる。このとき，以下の問いに答えなさい。

(a)　$n=4$ のとき，X_4 が 5 以上となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ である。

(b)　$n=4$ のとき，X_3 が 5 以上となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}\boxed{カ}}{\boxed{キ}\boxed{ク}}$ である。

以降では，2 以上の自然数 n に対して，n 回の試行で X_2 が 2 以下となる確率を P_n と表す。

(c)　P_n が 0.3 以上となるような，最小の試行回数は $n=\boxed{ケ}$ である。

(d)　$P_6=\dfrac{\boxed{コ}\boxed{サ}\boxed{シ}}{\boxed{ス}\boxed{セ}\boxed{ソ}}$ である。

（下書き用紙）

(3) 定数 α，β，γ に対して，数列 $\{a_n\}$ を以下の条件で定める。

$$a_1 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{5} + \frac{\beta n + \gamma}{5^{n+2}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(a)

$$a_3 = \frac{\alpha}{\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}\beta + \boxed{\text{エ}}\gamma}{\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}}$$

であり，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$$5^n a_n = \frac{\beta}{\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}}n^2 + \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}\left(\gamma - \frac{\beta}{\boxed{\text{サ}}}\right)n + \boxed{\text{シ}}\alpha - \frac{\gamma}{\boxed{\text{ス}}}$$

が成り立つ。

(b) $\beta \neq 0$ かつ $\gamma = 25\alpha$ のときを考える。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 5^k a_k$$

とすると

$$S_n = \frac{\beta n}{\boxed{\text{セ}}\boxed{\text{ソ}}}\left(n + \boxed{\text{タ}}\right)\left(n + \boxed{\text{チ}}\boxed{\text{ツ}}\frac{\alpha}{\beta} - \boxed{\text{テ}}\right)$$

であり，さらに $\beta = 25\alpha$ のときには

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}\boxed{\text{ニ}}} \times \frac{n\left(n + \boxed{\text{ヌ}}\right)}{\alpha\left(n + \boxed{\text{ネ}}\right)\left(n + \boxed{\text{ノ}}\right)}$$

である。ただし $\boxed{\text{ネ}} \leqq \boxed{\text{ノ}}$ とする。

(c) $\beta = 0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}\alpha + \frac{\gamma}{\boxed{\text{フ}}\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。ただし

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^n} = 0$$

を用いてよい。

（下書き用紙）

2 以下の問いに答えなさい。ただし，空欄 $\boxed{\text{（あ）}}$ ～ $\boxed{\text{（け）}}$ については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(25 点)

三角形 OAB において，辺 OA の中点を M とし，線分 BM 上に点 P を BP : PM = $\lambda : 1-\lambda$ となるようにとる。ただし，λ は $0 < \lambda < 1$ を満たす定数とする。さらに 2 点 O，P を通る直線と辺 AB の交点を Q とする。また，以下では $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，λ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{（あ）}}\,\vec{a} + \boxed{\text{（い）}}\,\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{（う）}}\,\vec{a} + \boxed{\text{（え）}}\,\vec{b}$$

である。また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，および $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boxed{\text{（お）}}\,|\vec{a}|^2 + \boxed{\text{（か）}}\,|\vec{b}|^2 + \boxed{\text{（き）}}\,\vec{a} \cdot \vec{b}$$

である。

(2) さらに，次の条件が成り立つとする。

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$
- $\mathrm{OQ} \perp \mathrm{AB}$
- $\mathrm{OQ} = 1$

このとき $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ を λ を用いて表すと

$$|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{\text{（く）}}}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{（け）}}}$$

である。なお，（く）と（け）を導く過程を所定の場所に書きなさい。

（下書き用紙）

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えなさい。ただし，空欄 $\boxed{（あ）}$ ～ $\boxed{（き）}$ については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(25 点)

(1) 実数 x の関数

$$f(x) = \frac{3x + \sqrt{32 - 7x^2}}{4}$$

の定義域は $\boxed{（あ）} \leqq x \leqq \boxed{（い）}$ である。また，$f(x)$ は，$x = \boxed{（う）}$ のとき $f(x) = 0$ となり，$x = \boxed{（え）}$ のとき極大値 $\boxed{（お）}$ をとる。

(2) 座標平面上の曲線

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4$$

について以下の問いに答えなさい。

(a) 曲線で囲まれた部分の面積は $\boxed{（か）}$ である。

(b) 曲線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{（き）}$ である。なお，（き）を導く過程を所定の場所に書きなさい。