

L 1

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ム までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、サ などは既出の サ を表す。

(40 点)

(1) $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xe^{-x^2+2\sqrt{2}x}$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底とする。

$$f'(x) = \left(-\text{ア} x^2 + \text{イ} \sqrt{\text{ウ}} x + \text{エ} \right) e^{-x^2+2\sqrt{2}x}$$

なので $f(x)$ は

$$x = \text{オ} + \frac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}}$$

において最大値をとる。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。

(下書き用紙)

(2) 数列 $\{a_n\}$ を、初項 $a_1 = 5$ 、公比 3 の等比数列とし、

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。また、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_{n+2} = 6b_{n+1} + 27b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(a) $S_n = (\boxed{\text{ク}}^n - 1) \cdot \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ となる。

(b) 数列 $\{b_n\}$ は

$$\begin{aligned} b_{n+2} + \boxed{\text{サ}} b_{n+1} &= \boxed{\text{シ}} (b_{n+1} + \boxed{\text{サ}} b_n), \\ b_{n+2} - \boxed{\text{シ}} b_{n+1} &= -\boxed{\text{サ}} (b_{n+1} - \boxed{\text{シ}} b_n) \end{aligned}$$

を満たす。よって一般項は

$$b_n = \boxed{\text{シ}}^n \cdot \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}}} - (-\boxed{\text{サ}})^n \cdot \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}}$$

となる。

(c) 第 n 項が $\frac{b_n}{S_n^m}$ である数列が収束するような自然数 m のうち最小のものは

$m = \boxed{\text{ト}}$ である。また、そのとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{S_n^{\boxed{\text{ト}}}} = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}}$ となる。

(下書き用紙)

- (3) a, b を自然数とし, $n = 162a^5 + 72b^5$ とおく。 a が 2 でちょうど s 回, b が 2 でちょうど t 回割り切れるとする。 $162 = 2 \cdot 3^{\square}$, $72 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ なので $162a^5$ は 2 でちょうど $(\square s + \square)$ 回, $72b^5$ は 2 でちょうど $(\square t + \square)$ 回割り切れる。 よって, n が 2 でちょうど 13 回割り切れるための必要十分条件は $s \geq \square$ かつ $t = \square$ である。

(下書き用紙)

問題

2

の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2

放物線 $y = x^2 - 2x$ を C ，直線 $y = x$ を ℓ とする。 C と ℓ の交点のうち， x 座標が正となるものを P とする。 C と ℓ が囲む部分を A とし， A を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を V_1 ， A を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を V_2 とする。

- (1) P の座標を求めよ。
- (2) A の面積を求めよ。
- (3) V_1 を求めよ。
- (4) V_2 を求めよ。

(30 点)

(下書き用紙)

問題

3

の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3

a, b, c を正の実数とし、座標空間において、3点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ をとる。三角形 ABC の面積を S とおく。

(1) $\cos \angle BAC$ と S を、それぞれ a, b, c を用いて表せ。

以下では、 $a = \frac{1}{\sin \theta}$, $b = \frac{1}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)}$, $c = \frac{1}{\cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)}$ を満たすものとする。ただし、 θ は

$$(*) \quad \begin{cases} -\pi < \theta \leq \pi \\ \sin \theta > 0 \\ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) > 0 \\ \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) > 0 \end{cases}$$

を満たす範囲を動く。

(2) 条件 $(*)$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) $t = a^2$ とおく。 S^2 を t についての分数式で表せ。

(4) S が最小となるときの a^2 の値を求めよ。

(30 点)

(下書き用紙)



1

2