2020年度 〔試験時間　100分〕

A 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は**解答用マークシート**にマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の (1) から (3) において，$\boxed{}$ 内のカタカナおよびひらがなにあてはまる0から9までの数字を求め，その数字を**解答用マークシート**にマークせよ。ただし，$\boxed{\mid}$ は2桁（けた）の数を，$\boxed{\mid\mid}$ は3桁の数を，$\boxed{\mid\mid\mid\mid\mid}$ は6桁の数を，それぞれ表すものとする。また，$\boxed{ア}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は $\boxed{ア}$ のように網掛けで表記するものとする。なお，分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形で表すこと。 (40点)

(1) (a) 1回目は3枚のコインを同時に投げ，2回目以降は直前の回で表が出た枚数と同じ枚数のコインを同時に投げる。すべて裏が出た回で終了とする。このとき，2回目，3回目で終了となる確率は，それぞれ

$$\frac{\boxed{アイ}}{2^{\boxed{ウ}}},\quad \frac{\boxed{エオカ}}{2^{\boxed{キ}}}$$

である。

(b) 1回目は3枚のコインを同時に投げ，2回目以降は直前の回で表が出た枚数の2倍の枚数のコインを同時に投げる。すべて裏が出た回で終了とする。このとき，2回目，3回目で終了となる確率は，それぞれ

$$\frac{\boxed{クケ}}{2^{\boxed{コ}}},\quad \frac{\boxed{サシスセソタ}}{2^{\boxed{チツ}}}$$

である。

（下書き用紙）

(2) α は $\alpha^2-\alpha-1=0$ をみたすような正の実数とする。

(a) すべての自然数 n に対して，$\alpha^n=a_n\alpha+b_n$ をみたすような整数 a_n，b_n が存在する。たとえば，

$$a_3=\boxed{テ},\ b_3=\boxed{ト},\ a_4=\boxed{ナ},\ b_4=\boxed{ニ},\ a_5=\boxed{ヌ},\ b_5=\boxed{ネ}$$

である。このとき，すべての自然数 n について，

$$a_{n+2}=\boxed{ノ}a_{n+1}+\boxed{ハ}a_n$$

が成り立つ。

(b) すべての自然数 n に対して，$\alpha^n=p_n+q_n\sqrt{5}$ をみたすような有理数 p_n，q_n が存在する。ここで，p_n，q_n がともに整数であるような自然数 n の値を小さい方から順に 4 つ挙げると $\boxed{ヒ}$，$\boxed{フ}$，$\boxed{ヘ}$，$\boxed{ホマ}$ となり，

$$\alpha^{\boxed{ヒ}}=\boxed{ミ}+\boxed{ム}\sqrt{5}$$

$$\alpha^{\boxed{フ}}=\boxed{メ}+\boxed{モ}\sqrt{5}$$

$$\alpha^{\boxed{ヘ}}=\boxed{ヤユ}+\boxed{ヨラ}\sqrt{5}$$

$$\alpha^{\boxed{ホマ}}=\boxed{リルレ}+\boxed{ロワ}\sqrt{5}$$

である。また，p_n，q_n がともに整数であるような 100 以下の自然数 n は，全部で $\boxed{ヲン}$ 個ある。

（下書き用紙）

(3) i は虚数単位とする。

(a) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点は 2 点 $\left(-\sqrt{\boxed{\text{あ}}},0\right)$，$\left(\sqrt{\boxed{\text{い}}},0\right)$ である。

また，この楕円で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{う}}\pi$ である。

(b) 複素数 z が $\left|2z-1-\sqrt{2}i\right|+\left|2z+1+\sqrt{2}i\right| \leqq 4$ の範囲を動くとき，

複素数平面で点 z が描く図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{え}}}{\boxed{\text{お}}}\pi$ である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$，$g_n(x)$ を

$$f_n(x) = nx^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}x, \quad g_n(x) = nx^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}x$$

と定める。また，

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx, \quad b_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx$$

とする。 (30 点)

(1) a_2 の値を求めよ。

(2) a_n を a_{n+2} を用いて表せ。また，b_n を b_{n+2} を用いて表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ とする。

(a) a，b の値を求めよ。

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a}{b_n - b}$ を求めよ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a}{(b_n - b)^2}$ を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$ 平面上の異なる 4 点 O, A, B, C が $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ をみたすとする。また，$\angle$ACB の二等分線について，直線 OA との交点を D，直線 OB との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，さらに $|\vec{a}| = \alpha$, $|\vec{b}| = \beta$ とするとき，次の問いに答えよ。 (30 点)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = p\vec{a} + \vec{b}$ とするとき，p を α, β の式で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\vec{a}$ とするとき，s を α, β の式で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\vec{b}$ とするとき，t を α, β の式で表せ。

(4) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の値を求めよ。また，四角形 ACBD の面積を α, β の式で表せ。

（下書き用紙）