

K 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 13 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。  
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
  - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。  
2 箇所以上マークすると採点されません。  
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
  - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。  
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ミ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、ア などは既出の ア を表す。

(40 点、ただし数学科は 80 点)

(1) 数列  $\{a_n\}$  は

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 4n + 8 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

を満たしているとする。 $b_n = \frac{1}{a_n}$  において、 $b_n$  を求めると

$$b_n = \text{ア} n^2 + \text{イ} n + \text{ウ}$$

である。したがって、

$$a_n = \frac{1}{\text{ア} n^2 + \text{イ} n + \text{ウ}}$$

となる。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$$

である。

(下書き用紙)

(2) 自然数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対し

$$U = \{x \mid a \leq x \leq b, x \text{ は自然数}\}$$

を全体集合とし,  $U$  の部分集合

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b, x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid a \leq x \leq b, x \text{ は } 8 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid a \leq x \leq b, x \text{ は素数}\}$$

$$D = \{x \mid a \leq x \leq b, x \text{ は奇数}\}$$

を考える。また  $U$  の部分集合  $F$  に対し,  $\overline{F}$  で  $F$  の補集合を表し,  $n(F)$  は  $F$  の要素の個数を表すとする。

(a)  $a = 50, b = 100$  のとき,  $n(A) = \boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}$ ,  $n(B) = \boxed{\text{ク}}$ ,  
 $n(A \cap B) = \boxed{\text{ケ}}$ ,  $n(A \cup B) = \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}$ ,  $n(A \cap \overline{B}) = \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}$  である。

(b)  $a = \boxed{\text{セ}}$ ,  $b = \boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}}$  のとき,  $n(C) = n(D) = \boxed{\text{チ}}$  かつ  $n(\overline{D}) = 7$  となる。また, このとき  $C$  の部分集合で要素の個数が 2 となるものは全部で  $\boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}$  個ある。

(下書き用紙)

(3)  $f(x)$ ,  $g(x)$  はすべての実数  $x$  で微分可能な関数とする。また,  $g(x)$  は常に  $g(x) > 0$  であるとする。さらに,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{3}{4}, \quad f(1) = \frac{5}{7}, \quad f'(1) = \frac{3}{7}$$

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = \frac{1}{4}, \quad g(1) = \frac{7}{5}, \quad g'(1) = \frac{1}{5}$$

を満たすとする。ただし,  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  はそれぞれ  $f(x)$ ,  $g(x)$  の導関数を表す。

このとき次の極限値を求めよ。ただし,  $\log$  は自然対数を表す。

$$(a) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(h)) - 1}{h} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}} \boxed{\text{ニ}}}$$

$$(b) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(g(h))}{h} = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

$$(c) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)g(1+2h) - 1}{h} = \frac{\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}}}$$

$$(d) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(f(3h))}{h} = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

$$(e) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12^{g(h)} - 12}{h} = \boxed{\text{マ}} \log 2 + \boxed{\text{ミ}} \log 3$$

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

**2** 座標平面上に、方程式  $x^2 + y^2 = 4$  の表す円  $C$  と、動点  $P(t, -t-2)$  ( $t \geq -4$ ) がある。

- (1)  $t = -4$  のとき、 $P$  を通る  $C$  の 2 本の接線の方程式をそれぞれ求めよ。
- (2)  $P$  を通る  $C$  の接線の本数が、 $-4 \leq t < t_1$  では 2、 $t = t_1$  では 1 となるとする。  
 $t_1$  の値を求めよ。

以下、 $t_1$  は (2) で求めたものとし、 $-4 \leq t < t_1$  とする。

- (3)  $P$  を通る  $C$  の 2 本の接線の接点を結ぶ直線  $\ell$  の方程式を、 $t$  を用いて表せ。
- (4) (3) の直線  $\ell$  は、 $t$  の値によらず定点  $Q$  を通る。 $Q$  の座標を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 60 点)

(下書き用紙)

問題

3

の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3

定数  $k$  ( $k > 0$ ) に対し、関数  $f(x)$  を定積分

$$f(x) = \int_0^k |e^t - x| dt$$

により定義する。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

- (1)  $x < 1$  のとき、上の定積分を計算し、 $f(x)$  を  $x$  と  $k$  を用いて表せ。
- (2)  $1 \leq x \leq e^k$  のとき、上の定積分を計算し、 $f(x)$  を  $x$  と  $k$  を用いて表せ。
- (3) 区間  $1 \leq x \leq e^k$  における  $f(x)$  の最小値を  $k$  を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた最小値が 1 となる  $k$  の値を求めよ。
- (5)  $k$  を (4) で求めた値とする。このとき、座標平面において、曲線  $y = f(x)$ 、 $x$  軸、直線  $x = 1$ 、および、直線  $x = e^k$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 60 点)

(下書き用紙)





