2019 年度　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

L 1　　数　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 12 ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の (1), (2), (3) においては, $\boxed{}$ 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 として, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 座標平面において曲線 $C_1 : y = x^3 - x$ と曲線 $C_2 : y = x^2 + a$ を考える。ただし, a は実数の定数である。

(a) 2 つの曲線 C_1 と C_2 が接するのは

$$a = -\boxed{ア} \text{ と } a = \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$$

のときである。ただし,「2 つの曲線が接する」とは,「2 つの曲線が共有点をもち, その点において共通の接線をもつ」ことを意味する。

以下 (b), (c) では $-\boxed{ア} < a < \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ の場合を考える。

このとき, 曲線 C_1 と曲線 C_2 は共通の接線をもつ。そのうちの 1 つを ℓ とし, 直線 ℓ の曲線 C_1 における接点の x 座標を t とする。

(b) a と t は関係式 $a = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t^4 - \boxed{キ}t^3 - \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}t^2 + \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ を満たす。

(c) 直線 ℓ と曲線 C_1 で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{シ}\boxed{ス}}{\boxed{セ}}t^4$ である。

（下書き用紙）

(2) 5チーム A, B, C, D, E が総当たり戦を行い，どの2チームも1回ずつ試合を行う。ただし，どの試合においても引き分けはないとする。この総当たり戦において，最も多く勝利をあげたチームを「優勝」とする。優勝するチームは複数あってもよい。例えば，全勝のチームがなく，3勝1敗のチームが3つあった場合は，3チームとも優勝とする。

(a) どの試合においても各チームが勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるとする。このとき

- 全勝のチームがない確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である。
- 全勝のチームもなく，全敗のチームもない確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}$ である。

(b) チーム A が他の4チームに勝つ確率はいずれも $\frac{2}{3}$ であり，他の4チーム B, C, D, E 同士の試合においては各チームが勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるとする。このとき

- チーム A がちょうど3勝する確率は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である。
- チーム A が3勝し，かつ優勝しない確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。
- チーム A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテト}}$ である。

（下書き用紙）

(3) $a,\ b,\ c,\ d$ を実数とする。z に関する 4 次方程式

$$z^4+az^3+bz^2+cz+d=0 \quad \cdots(*)$$

が $2+\sqrt{5}\,i$ を解にもつとする。ただし i は虚数単位である。

(a) c と d は a と b を用いて

$$\begin{aligned} c &= -\boxed{ア}\,a-\boxed{イ}\,b+\boxed{ウ}, \\ d &= \boxed{エオ}\,a+\boxed{カ}\,b+\boxed{キク} \end{aligned}$$

と表され，方程式 $(*)$ の左辺は

$$\left(z^2-\boxed{ケ}\,z+\boxed{コ}\right)\left\{z^2+\left(a+\boxed{サ}\right)z+\boxed{シ}\,a+b+\boxed{ス}\right\}$$

と因数分解される。

以下 (b)，(c) では方程式 $(*)$ がさらに以下の 2 つの条件を満たす場合を考える。

- 絶対値が $\sqrt{5}$ の解を 2 つもつ
- 4 つの解の総和が 7 である

(b) このとき $a=-\boxed{セ}$，　$b=\boxed{ソタ}$ である。

(c) 絶対値が $\sqrt{5}$ である方程式 $(*)$ の 2 つの解を z_1，z_2 とする。複素数平面上において，z_1 と z_2 を結ぶ線分を直径とする円を C とする。実数 p，q に対して，w に関する 2 次方程式 $w^2-pw+q=0$ が円 C 上に虚数となる解をもつとき，p と q のとり得る値の範囲は

$$\begin{aligned} \boxed{チ}-\sqrt{\boxed{ツテ}} &< p < \boxed{チ}+\sqrt{\boxed{ツテ}}, \\ \boxed{ト}-\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\sqrt{\boxed{ヌネ}} &< q < \boxed{ト}+\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\sqrt{\boxed{ヌネ}} \end{aligned}$$

である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙 $\boxed{2}$ に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えなさい。ただし，空欄（あ）～（か）については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

座標平面において，連立不等式

$$\begin{cases} 3|x| + |y| \leqq 3 \\ y \geqq x + p \end{cases}$$

の表す領域を D とする。ただし，p は $-3 < p < 3$ を満たす定数とする。

(25 点)

(1) 領域 D の面積について考える。$p = 2$ のとき，D の面積は $\boxed{（あ）}$ であり，$p = \frac{1}{2}$ のとき，D の面積は $\boxed{（い）}$ である。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x + y$ の最大値は $\boxed{（う）}$ である。また，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x + y$ の最小値が $-\frac{11}{5}$ となるような p の値は $\boxed{（え）}$ である。

(3) m を正の定数とする。点 (x, y) が領域 D を動くとき，$mx + y$ の最大値が 5，最小値が $-\frac{8}{3}$ となるのは $m = \boxed{（お）}$ かつ $p = \boxed{（か）}$ のときである。
なお（お），（か）の値を導く過程を解答用紙の所定の欄に書きなさい。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙 $\boxed{3}$ に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えなさい。ただし，空欄（あ）～（く）については適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(25 点)

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$$A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}}\sin 2x dx, \qquad B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}}\cos 2x dx$$

とおく。ここで e は自然対数の底である。これらの定積分を求めると，自然数 n に対して

$$A_n=\boxed{（あ）},\qquad B_n=\boxed{（い）}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} nA_nB_n=\boxed{（う）}$$

である。

(2) $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \qquad D_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

とおく。このとき，$n \geqq 2$ の自然数 n に対して，漸化式

$$C_n=\boxed{（え）}C_{n-2},\qquad D_n=\boxed{（お）}D_{n-2}$$

が成り立つ。これより自然数 n に対して

$$C_{2n}D_{2n+1}=\boxed{（か）}C_0D_1,\qquad C_{2n}D_{2n-1}=\boxed{（き）}C_0D_1$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} nC_nD_n=\boxed{（く）}$$

である。なお（く）の値を導く過程を解答用紙の所定の欄に書きなさい。