2019年度　　〔試験時間　100分〕

K 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより11ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の各文章中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\cdots$ に当てはまる数字 **0** ～ **9** を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は，**4** でも **9** でも割り切れないものとします。なお，$\boxed{ア}$ は既出の $\boxed{ア}$ を表します。

$\boxed{1}$

(1) $x = 18^\circ$ とするとき，$\sin 2x = \cos 3x$ により

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{\boxed{ア}}\left(\sqrt{\boxed{イ}} - \boxed{ウ}\right),\quad (\sin 36^\circ)^2 = \frac{1}{\boxed{エ}}\left(\boxed{オ} - \sqrt{\boxed{カ}}\right)$$

を得る。

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積と，1 辺の長さが 1 である正五角形の面積はそれぞれ，

$$\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\sqrt{\boxed{ケ\,コ} + \boxed{サ}\sqrt{5}},\quad \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\sqrt{\boxed{セ\,ソ} + \boxed{タ\,チ}\sqrt{5}}$$

である。

(3) 1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において，線分 BD と線分 CE の交点，線分 CE と線分 DA の交点，線分 DA と線分 EB の交点，線分 EB と線分 AC の交点，線分 AC と線分 BD の交点をそれぞれ F，G，H，I，J とする。このとき，線分 FG の長さは $\dfrac{1}{\boxed{ツ}}\left(\boxed{テ} - \sqrt{\boxed{ト}}\right)$ であり，線分 AI，IB，BJ，JC，CF，FD，DG，GE，EH，HA によって囲まれた部分の面積を S とすると，その 2 乗 S^2 の値は

$$\frac{\boxed{ナ\,ニ}}{\boxed{ヌ}} - \frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\sqrt{\boxed{ハ}}$$

である。

(25 点)

（下書き用紙）

2 k, m, n を自然数とする。黒球が m 個，白球が n 個入っている袋がある。この袋の中をよくかき混ぜた後，この袋から球を1個取り出す試行を考える。取り出した球が白球であったとき，取り出した白球にあらたに白球を1個加えて袋にもどし，試行を繰り返す。取り出した球が黒球であったとき，それ以上試行を繰り返さず終了する。k 回目の試行が行われ，かつ，ちょうど k 回目の試行で終了する確率を p_k $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。なお，あらたに加えるための白球は，限りなくたくさんあるものとする。

(1) $m = n = 1$ とする。

(a) $p_2 = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$p_4 = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ であり，

$$p_k = \frac{\boxed{カ}}{\left(k + \boxed{キ}\right)\left(k + \boxed{ク}\right)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。ただし，$\boxed{キ} < \boxed{ク}$。

(b) 80回以上2019回以下試行を繰り返して終了する確率は

$$\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシスセ}}$$

である。

(2) $m = 2$, $n = 4$ とする。

(a) $p_k = \dfrac{\boxed{ソタ}}{\left(k + \boxed{チ}\right)\left(k + \boxed{ツ}\right)\left(k + \boxed{テ}\right)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ である。

ただし，$\boxed{チ} < \boxed{ツ} < \boxed{テ}$。

(b) $p_k \leqq \dfrac{1}{12800}$ を満たす最小の k の値は $\boxed{トナ}$ である。

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} kp_k = \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

(25点)

（下書き用紙）

$\boxed{3}$ 点Oを原点とする xyz 空間に，中心 $\mathrm{A}(0, 0, 4)$，半径2とする球面 S があり，Oを通る直線が，球面 S と点Pで接するという。Oを頂点とし，点Pを通り xy 平面に平行な平面による S の切り口が底面となる直円錐を C とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおく。このとき，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，円錐 C の底面の半径は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，C の体積を V_1 とすると，$V_1 = \boxed{\text{エ}}\,\pi$ である。

(2) 球面 S の外部で，円錐 C の側面と球面 S とで囲まれた部分を C^* とし，その体積を V_2 とすると，$V_2 = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

(3) 点Oと点 $\mathrm{B}(0, 1, \sqrt{3})$ を通る直線を ℓ とする。円錐 C の中心軸が直線 ℓ の $z \geqq 0$ の部分と重なるように，円錐 C を傾けて得られる円錐を C' とする。ただし，傾けた円錐 C' の頂点は点Oにあるものとする。

(a) 円錐 C' の底面上の点の z 座標の最小値を h とすると，$h = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(b) 円錐 C' の側面と平面 $z = h$ で囲まれた部分の体積を V_3 とすると，

$$V_3 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,\pi$$

である。

(25点)

（下書き用紙）

$\boxed{4}$ aを正の実数とする。定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 3^x + 3^{4-x} - 6a\left(\left(\sqrt{3}\right)^x + \left(\sqrt{3}\right)^{4-x}\right) + a^2 + 2a - 3$$

とし，$t(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x + \left(\sqrt{3}\right)^{4-x}$ とする。

(1) x が $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲を動くとき，$t(x)$ の取りうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}} \leqq t(x) \leqq \boxed{\text{イ}\ \text{ウ}}$$

である。

(2) $3^x + 3^{4-x}$ を $t(x)$ を用いて表すと $(t(x))^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}\ \text{カ}}$ となる。

(3) $f(x)$ の最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする。

(a) $2 \leqq a < \dfrac{8}{3}$ のとき，

$$M(a) = \boxed{\text{キ}}\,a^2 - \boxed{\text{ク}\ \text{ケ}}\,a + \boxed{\text{コ}\ \text{サ}}$$
$$m(a) = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a - \boxed{\text{セ}\ \text{ソ}}$$

である。また，$\dfrac{8}{3} \leqq a \leqq \dfrac{10}{3}$ のとき，

$$M(a) = \boxed{\text{タ}}\,a^2 - \boxed{\text{チ}\ \text{ツ}}\,a + \boxed{\text{テ}\ \text{ト}}$$
$$m(a) = -\boxed{\text{ナ}}\,a^2 + \boxed{\text{ニ}}\,a - \boxed{\text{ヌ}\ \text{ネ}}$$

である。そして，

$$\int_2^{\frac{10}{3}} \left(M(a) - m(a)\right)^2 da = \frac{\boxed{\text{ノ}\ \text{ハ}\ \text{ヒ}\ \text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}\ \text{ホ}}}$$

である。

(b) $m(a) \geqq 22$ となるのは，$a \geqq \boxed{\text{マ}\ \text{ミ}}$ のときである。

(25点)

（下書き用紙）