2019年度　　〔試験時間　100分〕

P 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は**解答用マークシート**にマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の (1) から (3) において，$\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を**解答用マークシート**にマークせよ。ただし，$\boxed{\vdots}$ は2桁の数を表すものとする。なお，分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形で表すこと。また，根号を含む値は，根号の中の自然数が最小になる形で表すこと。

(50 点)

(1) $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=5$，$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{4}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を O とするとき，次の (a) から (c) が成り立つ。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{\boxed{ウ\vdots エ}}{\boxed{オ}}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\left(\boxed{カ}-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\sqrt{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\boxed{ケ}-\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ\vdots シ}}\sqrt{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

（下書き用紙）

(2) i は虚数単位とする。複素数平面上の点 $\mathrm{M}(3+\sqrt{3}i)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円を C とすると，C 上の任意の点 α に対して，原点 $\mathrm{O}(0)$ と点 α を通る直線は，C と共有点をもつ。そこで，共有点が 2 個のとき，点 α 以外の共有点を β とし，共有点が 1 個のとき，$\beta=\alpha$ とする。また，直線 OM について点 β と対称な点を γ とする。このとき，次の **(a)** から **(c)** が成り立つ。

(a) $|\alpha||\beta| = \boxed{\text{ス}}$

(b) $\alpha\gamma = \boxed{\text{セ}}\left(\cos\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}} + i\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{タ}}}\right)$

(c) 点 α が C 上を動くとき，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ の軌跡は，点 $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}i$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の円である。

（下書き用紙）

(3)　3つの等式

$$x^2 f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 + 2\int_0^x g(t)dt$$

$$g(x) = xf(x) + 4x^3 + x^2 \int_{-1}^{1} g(t)dt$$

$$f(-1) = g(-1)$$

をみたす整式 $f(x), g(x)$ を求めると，

$$f(x) = \boxed{\text{ヌ}}\,x^3 + \boxed{\text{ネ}}\,x^2 - \boxed{\text{ノ}}\,x - \boxed{\text{ハ}\,\text{ヒ}}$$

$$g(x) = \boxed{\text{フ}}\,x^4 + \boxed{\text{ヘ}\,\text{ホ}}\,x^3 - \boxed{\text{マ}}\,x^2 - \boxed{\text{ミ}\,\text{ム}}\,x$$

となる。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ 形と色が異なる5種類のタイルがある。形にはS型，L型の2種類があり，S型のタイルは2辺の長さが1と2であるような長方形，L型のタイルは2辺の長さが1と3であるような長方形をしている。さらに，S型のタイルには赤，青，黄の3色，L型のタイルには白，黒の2色がある。

自然数nに対して，縦の長さが1，横の長さがnであるような長方形をした壁一面にこれらのタイルを隙間なく重なりなく貼るとき，そのようなタイルの並べ方の総数をa_nとする。ただし，$a_1 = 0$とし，タイルは5種類とも何枚でも利用できるものとする。 (25点)

(1) a_2とa_3を求めよ。

(2) a_n, a_{n+1}を用いてa_{n+3}を表せ。

(3) $b_n = a_n + a_{n+1}$とおくとき，b_n, b_{n+1}を用いてb_{n+2}を表せ。

(4) $c_n = b_{n+1} - qb_n$とおくとき，$\{c_n\}$が等比数列となるような定数qをすべて求めよ。また，そのときの公比rを求めよ。

(5) b_nを求めよ。

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$を求めよ。

(7) a_nを求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$ e は自然対数の底，log は自然対数を表すものとする。 (25 点)

(1) $f(x) = xe^x - e^x - x - 1$ とする。

(a) 実数 a が $f(a) = 0$ をみたすとき，$f(-a)$ の値を計算せよ。

(b) 方程式 $f(x) = 0$ は正の実数解をいくつもつか答えよ。

(2) 2 つの曲線 $y = e^x$，$y = \log x$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(a) ℓ を C_1 と C_2 の共通の接線とする。ℓ と C_1 との接点を (a, e^a)，ℓ と C_2 との接点を $(b, \log b)$ とするとき，b を a の分数式として表せ。

(b) C_1 と C_2 の共通の接線のうち，傾きが最大のものを ℓ_1，最小のものを ℓ_2 とする。ℓ_1 の傾きを m_1，ℓ_2 の傾きを m_2 とするとき，$m_1 m_2$ の値を求めよ。

(c) **(b)** で定めた ℓ_1，ℓ_2 に対して，曲線 C_1 と 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 C_2 と 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

（下書き用紙）