2019年度　〔試験時間　100分〕

C 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ロ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{テ}$ などは既出の $\boxed{テ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき 関数

$$y = \sin^3\theta + \cos^3\theta - 2\sin 2\theta$$

の最大値と最小値を求めよう。

まず $x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと $x = \sqrt{\boxed{ア}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{イ}}\right)$ と変形できるので x のとり得る範囲は $-\boxed{ウ} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{エ}}$ となる。

次に y を変形して x で表すと

$$y = -\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}x^3 - \boxed{キ}x^2 + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}x + 2$$

となる。これを微分して因数分解すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)\left(x + \boxed{シ}\right)$$

となる。これらのことより，y の最大値は $\dfrac{\boxed{ス}\boxed{セ}}{\boxed{ソ}\boxed{タ}}$，最小値は $-\boxed{チ} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\boxed{ツ}}$ である。

(下書き用紙)

(2) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。2^{36} は $\boxed{テ\,ト}$ 桁の整数である。3^n が $\boxed{テ\,ト}$ 桁の整数となる最小の自然数 n は $\boxed{ナ\,ニ}$ であり，$2^{36}+6\times3^{\boxed{ナ\,ニ}}$ は $\boxed{ヌ\,ネ}$ 桁の整数である。

（下書き用紙）

(3)　3 つのさいころを同時に投げる。

(a)　出る目がすべて同じになる確率は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}\boxed{ヒ}}$，すべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}$ である。出る目のうち ちょうど 2 つが一致し他は異なる確率は $\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}\boxed{ミ}}$ である。

(b)　出る目の最小値が 3 以上となる確率は $\dfrac{\boxed{ム}}{\boxed{メ}\boxed{モ}}$，最小値が 3 となる確率は $\dfrac{\boxed{ヤ}\boxed{ユ}}{\boxed{ヨ}\boxed{ラ}\boxed{リ}}$，最小値が 3 で最大値が 5 となる確率は $\dfrac{\boxed{ル}}{\boxed{レ}\boxed{ロ}}$ である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 放物線 C： $y=\frac{1}{4}x^2-x$ と直線 $y=k\ (k>0)$ の交点を x 座標の小さい方から A, B とする。点 A, B における C の接線をそれぞれ ℓ, m とし，ℓ と m の交点を P とする。

(1) 直線 ℓ, m の方程式と，点 P の座標をそれぞれ求めよ。

(2) $\triangle$ABP が正三角形となるような k の値を求めよ。

(3) $\angle$PAB $= 75°$ となるような k の値を求めよ。

(4) $\triangle$ABP の内接円の半径 r が $2k$ 以上となるような k の最大値を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

(下書き用紙)

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定める。

(1) $t = \tan\theta$ とおく置換積分法により $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ の値を求めよ。

(2) $0 < a < 1$ とし，m を自然数とするとき，以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$f(a)\int_a^1 x^m dx < \int_a^1 f(x)x^m dx < \int_0^1 f(x)x^m dx < f(1)\int_0^1 x^m dx$$

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m$ を求めよ。必要ならば $s > 1$ のとき

$$\left(1-\frac{1}{s}\right)^s < \frac{1}{2}$$

となることを用いてよい。

(4) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m\int_{1-\frac{1}{\sqrt{m}}}^1 f(x)x^m dx$ を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

（下書き用紙）