

F 2

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 **1** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 自然数 n に対し、 $l(n)$ を n の正の約数の個数とし、 n の正の約数を小さい順に並べたときの j 番目の数を $a(n, j)$ とする ($j = 1, \dots, l(n)$)。また、数列 $b(1), b(2), \dots$ を

$$b(1) = 1, \quad b(n) = - \sum_{k=1}^{l(n)-1} b(a(n, k)) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める。例えば、 $n = 6$ の場合、 $l(6) = 4$ となり、

$$a(6, 1) = 1, \quad a(6, 2) = 2, \quad a(6, 3) = 3, \quad a(6, 4) = 6$$

となる。また、 $b(6) = -(b(1) + b(2) + b(3))$ である。

このとき、次の各問いに答えよ。

(50 点)

- (1) p を素数とするとき、 $b(p)$ を求めよ。
- (2) p, q を異なる 2 つの素数とするとき、 $b(pq)$ を求めよ。
- (3) p を素数、 k を 2 以上の自然数とするとき、 $b(p^k)$ を求めよ。
- (4) p, q, r を異なる 3 つの素数とするとき、 $b(pqr)$ を求めよ。
- (5) n を 2 以上の自然数とし、 $p_1, \dots, p_n$ を異なる n 個の素数からなる数列とするとき、 $\sum_{k=1}^n k \cdot b(p_k)^k$ を求めよ。
- (6) n を 3 以上の自然数とし、 $p_1, \dots, p_n$ を異なる n 個の素数からなる数列とするとき、

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(b(p_k) + k)(b(p_k p_{k+1}) + k)}$$

を求めよ。

- (7) p, q, r を異なる 3 つの素数とし、 $n = pqr$ とするとき、 $\sum_{k=1}^{l(n)} \frac{n \cdot b(a(n, k))}{a(n, k)}$ が $p-1$ の倍数であることを示せ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 $0 \leq s \leq 1$ を満たす実数 s に対し、座標平面上で曲線 C_s を次式によって定義する。

$$C_s : \begin{cases} x = t - s \cos t \\ y = \sin t + s \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

また、 C_s 上の点 $(t - s \cos t, \sin t + s)$ を $P_s(t)$ とする。 s が 0 から 1 まで動くときに C_s が通過する部分を D とする。

(50 点)

- (1) C_0 を図示せよ。
- (2) s が 0 から 1 まで動くとき、3 点 $P_s(0)$, $P_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P_s(\pi)$ の軌跡を図示せよ。
- (3) C_1 上の点 $P_1(t)$ における接線の傾きを t を用いて表せ。
- (4) D を図示し、 D の面積を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

