平成 30 年度　　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

W 1　数　学

この冊子は，数学の問題で１ページより４ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の各文章中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, … に当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。 根号の中に入る数は，4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお，$\boxed{ア}$ は既出の $\boxed{ア}$ を表します。

$\boxed{1}$

(1) 原点 O を中心とする半径 r $(r>0)$ の円に内接する四角形 ABCD があり，$\mathrm{AB}=7$, $\mathrm{BC}=5$, $\mathrm{AC}=\sqrt{39}$ であるという。

(a) $r=\sqrt{\boxed{アイ}}$ である。

(b) $\mathrm{CD}=4$ のとき，$\mathrm{AD}=-\boxed{ウ}+\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

(c) $\mathrm{CD}=3\,\mathrm{AD}$ のとき，四角形 AOCD の面積は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}\sqrt{\boxed{ケ}}$ となる。

(2) 成功か失敗かのどちらかが起こる実験を繰り返し行う。ある回に実験が成功したとき次の回にも実験が成功する確率は $\dfrac{1}{4}$ であり，ある回に実験が失敗したときに次の回にも実験が失敗する確率は $\dfrac{3}{5}$ であるという。1 回目の実験が成功する確率を $\dfrac{1}{3}$ とし，n 回目 (n は自然数) の 実験が成功する確率を p_n とする。

(a) $p_2=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$, $p_3=\dfrac{\boxed{スセソ}}{\boxed{タチツ}}$ である。

(b) p_{n+1} を p_n を用いて表すと

$$p_{n+1}=\left(-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}\right)p_n+\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

となる。

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}$ である。

(25 点)

右のページは白紙です。

2 aを正の実数とする。xy平面上の点$\mathrm{A}(a, 1)$と動点$\mathrm{P}(x, y)$の距離は，点Pと直線$y=-1$の距離に等しいという。点Pの軌跡をC_1とし，放物線$y=-4x^2+ax+a$をC_2とする。文中のlogは自然対数を表す。

(1) C_1とC_2が共有点をただ1つもつのは$a=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$のときである。このとき，共有点における$C_2$の接線を$\ell_1$，共有点を通り$\ell_1$に垂直な直線を$\ell_2$とすると，$\ell_1$と$\ell_2$，および$y$軸によって囲まれる部分の面積は，$\dfrac{\boxed{エオカ}}{\boxed{キクケ}}$である。

(2) y軸とC_1の共有点が，y軸とC_2の共有点と一致するのは，$a=\boxed{コ}$のときである。このとき，C_1とC_2の共有点のx座標は$\boxed{サ}$，$\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$であるから，$C_1$と$C_2$で囲まれる部分の面積は$\dfrac{\boxed{タチツ}}{\boxed{テトナ}}$である。

曲線$y=\dfrac{7}{x+1}\ (x \neq -1)$を$C_3$とする。

(3) $a=\boxed{コ}$とする。このとき，C_1とC_3の交点の座標は$(\boxed{ニ}, \boxed{ヌ})$であり，C_1とC_3，およびy軸によって囲まれる部分をy軸の周りに1回転してできる立体の体積は$\pi\left(\boxed{ネノ}-\boxed{ハヒ}\log\boxed{フ}\right)$である。

(25点)

右のページは白紙です。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqq x \leqq r, r > 0)$ を考える。放物線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ は，異なる2つの共有点で接するという。ただし，2つの曲線が共有点Aで接するとは，2つの曲線が点Aにおいて共通の接線をもつことである。また，文中の log は自然対数を表す。

(1) $r = \sqrt{\boxed{ア}}$ であり，共有点の座標はそれぞれ $(-\boxed{イ}, \boxed{ウ})$，$(\boxed{エ}, \boxed{オ})$ である。

(2) xy 平面上において，不等式

$$-g(x) \leqq y \leqq f(x), \quad -\sqrt{\boxed{ア}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{ア}}$$

が表す領域を D とし，α を

$$0 \leqq \alpha \leqq 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす定数とする。点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$\alpha x + y$ のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{カ}\alpha^{\boxed{キ}} + \boxed{ク}} \leqq \alpha x + y \leqq \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\alpha^{\boxed{サ}} + \boxed{シ}$$

である。したがって，点 (x, y) が領域 D 内を動き，α が $(*)$ の範囲を動くとき，$\alpha x + y$ のとりうる値の最大値は $\boxed{ス}$ であり，最小値は $-\boxed{セ}$ である。

(3) $\alpha \geqq 0$ とする。直線 $y = -\alpha x + k$ と曲線 $y = g(x)$ が接するように k を定める。このとき，接点の座標を $(u(\alpha), v(\alpha))$ とおくと，

$$u(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{\boxed{ソ}}{\alpha^{\boxed{タ}} + \boxed{チ}}}, \qquad v(\alpha) = \sqrt{\frac{\boxed{ツ}}{\alpha^{\boxed{テ}} + \boxed{ト}}}$$

である。また，

$$\int_0^{\frac{5}{12}} u(\alpha)d\alpha = \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}\boxed{ヌ}}\sqrt{\boxed{ネ}}, \quad \int_0^{\frac{5}{12}} v(\alpha)d\alpha = \sqrt{\boxed{ノ}}\log\frac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4 自然数 m を自然数 n で割ったときの余りを $R[m:n]$ で表すとする。

(1) 31^2-1 を 30 で割ったときの余り $R[31^2-1:30]$ は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，31^3 を 30 で割ったときの余り $R[31^3:30]$ は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $R[31^{13}:29]=\boxed{\text{ウエ}}$ であり，$R[31^{13}:33]=\boxed{\text{オカ}}$ である。

(3) $R[31^{130}:900]=\boxed{\text{キクケ}}$ である。

(4) $R[31^{103}:960]=\boxed{\text{コサ}}$ である。

(5) $R[31^{31}:27000]=\boxed{\text{シスセソタ}}$ である。

(25 点)

右のページは白紙です。