平成 30 年度　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

Ｕ 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより５ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{マ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -3x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad (|x| > 1)$$

によって定める。

(a) 関数 $f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウ}}$ で極大値 $-\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ をとる。

(b) 定数 a, b をそれぞれ

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

とするとき， $a = -\boxed{カ}$， $b = -\boxed{キ}$ である。また，

$$\lim_{x\to\infty} \{x\,f(x) - ax^2\} = -\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \{x\,f(x) - bx^2\} = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) (a)　方程式 $2^{4x^2\log_2 x}=x$ の実数解の個数は $\boxed{シ}$ 個である。

(b)　定数 a, b をそれぞれ $a=\log_{10}2=0.3010\cdots$, $b=\log_{10}3=0.4771\cdots$ とする。このとき,

$$\log_{10}\frac{9}{125}=\boxed{ス}\,a+\boxed{セ}\,b-\boxed{ソ}$$

$$\log_{\frac{1}{100}}\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}a-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}b$$

と表される。また，自然数 n に対して，$\left(\frac{3}{2}\right)^k$ の整数部分が n 桁の数となる自然数 k のうち最大のものを k_n で表す。このとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}$$

の整数部分は $\boxed{ト}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1 = -\dfrac{18}{5}$ で,

$$a_{n+1} - 3a_n = 4(a_n + 3^n)(a_{n+1} + 3^{n+1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとする。$b_n = a_n + 3^n$ とおくと,

$$b_{n+1} - \boxed{\text{ナ}}\, b_n = 4b_n b_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。これより $b_n \neq 0$ ならば $b_{n+1} \neq 0$ であることが分かり, $b_1 = -\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ なので, 数学的帰納法によりすべての n で $b_n \neq 0$ であることが分かる。そこで, $c_n = \dfrac{1}{b_n}$ とおいて, c_n を求めると

$$c_n = \left(\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}}\right)^n - \boxed{\text{ノ}}$$

である。したがって

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ハ}} \cdot \boxed{\text{ヒ}}^{\,n}}{1 - \boxed{\text{フ}} \cdot \boxed{\text{ヘ}}^{\,n}}$$

となる。数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1} - a_n}{d^n}\right\}$ が $n \to \infty$ のときに 0 でない実数に収束するような正の数 d は $\boxed{\text{ホ}}$ であり, そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{d^n} = -\boxed{\text{マ}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標平面において，曲線 $y = \sin x$ の $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲にある部分の図形を C とする。実数 a, b に対し，図形 C を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動して得られる図形を $D_{a,b}$ と表す。ただし，実数 a は $0 < a < 2\pi$ の範囲にあるものとする。

(1) 図形 $D_{a,b}$ の x, y についての方程式を x の動く範囲を含めて表せ。

(2) 実数 a $(0 < a < 2\pi)$ に対して，図形 C と図形 $D_{a,b}$ が共有点をもつような b の範囲を a を用いて表せ。必要であれば公式

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を用いてよい。

(3) $b = \dfrac{1}{2}$ とする。C と $D_{a,\frac{1}{2}}$ が共有点をもつための a についての必要十分条件は，ある θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 $(0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi)$ を用いて

$$\theta_1 \leqq a \leqq \theta_2 \quad \text{または} \quad \theta_3 \leqq a \leqq \theta_4$$

と表せる。θ_2, θ_3 と $\sin\theta_1$，$\sin\theta_4$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 座標平面上の楕円 $(x+1)^2+2y^2=2$ を C とする。

(1) 楕円 C を極座標 (r,θ) を用いて極方程式で表し，r を θ を用いて表せ。ただし，極座標 (r,θ) の極は原点，始線は x 軸の正の部分とする。

(2) 2つの直線 ℓ_1 と ℓ_2 は原点を通り，垂直であるとする。ℓ_1 と楕円 C の交点を A と B，ℓ_2 と楕円 C の交点を P と Q とおいたとき，

$$\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{\mathrm{PQ}}$$

は垂直な 2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の取り方によらず一定であることを示し，その値を求めよ。

(3) 楕円 C の接線のうち，点 $(1,0)$ を通り y 切片が正であるものを ℓ とする。

(a) 接線 ℓ の方程式，および C と ℓ の接点の座標を求めよ。

(b) 楕円 C と接線 ℓ と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。