平成 30 年度　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

E 1　　　数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより６ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の (1) において， $\boxed{}$ 内の英文字にあてはまるものを選択肢 1 から 4 の中から 1 つ選び，その数字を解答用マークシートにマークせよ。また，(2), (3) において， $\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし，分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形に表すものとする。

(40 点)

(1) a, b を実数とする。

(a) a, b がともに有理数であることは，$a+b$ が有理数であるための $\boxed{\text{(a)}}$。

(b) a, b がともに有理数であることは，ab が有理数であるための $\boxed{\text{(b)}}$。

(c) $a \neq 0$ とする。このとき，a が有理数であることは，$\dfrac{1}{a}$ が有理数であるための $\boxed{\text{(c)}}$。

(d) $a > 0$ とする。a, b がともに有理数であることは，a^b が有理数であるための $\boxed{\text{(d)}}$。

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが十分条件ではない
3. 十分条件であるが必要条件ではない
4. 必要条件でも十分条件でもない

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) さいころを何回もくり返し投げ，関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ を以下のように定める。$f_1(x)=1$ と定め, 各自然数 i に対して，i 回目にさいころを投げたときに出た目が偶数ならば

$$f_{i+1}(x)=\int_0^x f_i(t)dt,$$

奇数ならば

$$f_{i+1}(x)=f_i'(x)$$

とする。ただし, $f_i'(x)$ は $f_i(x)$ の導関数とする。

自然数 n, m に対して,

$$f_n(x)=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

となる確率を $P(n,m)$ で表す。ただし, $0!=1$ とする。また, $P(n,0)$ は $f_n(x)=0$ となる確率を表すことにする。このとき,

$$P(3,1)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad P(3,3)=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad P(3,5)=\boxed{オ}$$

である。$n \geqq 2, m \geqq 2$ ならば

$$P(n,m)=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}P(n-1,m-1)+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}P(n-1,m+1)$$

が成り立ち,

$$P(5,3)=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}\boxed{シ}}$$

である。さらに, $n \geqq 2$ を満たすすべての n に対して,

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(n,m)=\boxed{ス}$$

である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) O を原点とする座標空間において 4 点を A$(1,1,0)$, B$(3,0,-1)$, C$(0,-2,1)$, D$(5,-4,3)$ とする。

(a) 直線 OD と点 A, B, C を通る平面との交点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{セ}\boxed{ソ}}{\boxed{タ}\boxed{チ}}, -\frac{\boxed{ツ}\boxed{テ}}{\boxed{ト}\boxed{ナ}}, \frac{\boxed{ニ}\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}\boxed{ノ}}\right)$$

である。

(b) 原点 O から点 A, B, C を通る平面に下ろした垂線と点 A, B, C を通る平面との交点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{ハ}\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}\boxed{ヘ}}, \frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}\boxed{ミ}}, \frac{\boxed{ム}\boxed{メ}}{\boxed{モ}\boxed{ヤ}}\right)$$

である。

(c) △ABC の面積 S は

$$\sqrt{\frac{\boxed{ユ}\boxed{ヨ}}{\boxed{ラ}}}$$

であり, 四面体 OABC の体積 V は

$$\frac{\boxed{リ}}{\boxed{ル}}$$

である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ a,b を $a>1$, $b \leqq -1$ を満たす実数とするとき，以下の問いに答えよ。

(30 点)

(1) 座標平面上で点 $\mathrm{A}(0,a)$ を通り，円 $C: x^2+y^2=1$ に接する 2 直線のうち，傾きが正のものを ℓ_1, 負のものを ℓ_2 をおく。ℓ_1, ℓ_2 の方程式およびそれらの C との接点を求めよ。

(2) 座標平面上で点 $\mathrm{B}(0,b)$ を通り，傾きが ℓ_1 の傾きより小さく ℓ_2 の傾きより大きい直線を ℓ_3 とおく。**(1)** で定めた直線 ℓ_1, ℓ_2 と ℓ_3 の交点および点 A を 3 頂点にもつ三角形の面積が最小になるような ℓ_3 の傾きを求めよ。またそのときの面積を a,b を用いて表せ。

(3) **(2)** で求めた面積を $S(a,b)$ とする。各 $a\ (a>1)$ に対し，b が $b \leqq -1$ の範囲を動くときの $S(a,b)$ の最小値 $T(a)$ を a を用いて表せ。

(4) **(2)** で求めた面積 $S(a,b)$ に対し，a,b が $a>1, b \leqq -1$ の範囲を動くとき，$S(a,b)$ を最小にする a,b の値およびそのときの最小値を求めよ。

(5) 半径 1 の円を内接円とするような三角形のうち，面積が最小になるような三角形の 3 辺の長さの和を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$

a_0 を $a_0 > 2$ なる実数とし，数列 $\{a_n\}$ がすべての 0 以上の整数 n に対して

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$$

を満たしているとする。また，$q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}$ とし，$a_0 = q_1 r + q_2$ を満たす実数 r をとる。

(30 点)

(1)

(a) a_1 と a_2 の値を r を用いて表せ。

(b)

$$(q_1 s + q_2)^2 - (q_1 s + q_2) + 1 = q_1(As^2 + Bs + C) + q_2$$

がすべての実数 s に対して成立するような定数 A, B, C の値を求めよ。

(2) A, B, C を **(1)** の **(b)** で求めた値とする。$b_0 = r$ とし，数列 $\{b_n\}$ がすべての 0 以上の整数 n に対して，

$$b_{n+1} = Ab_n^2 + Bb_n + C$$

を満たしているとする。

(a) $q_1 b_1 + q_2$ の値を r を用いて表せ。

(b) $q_1 b_2 + q_2$ の値を r を用いて表せ。

(3)

(a) すべての 0 以上の整数 n に対して

$$\frac{1}{a_{n+1} - p} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - p}$$

を満たす実数 p の値を求めよ。

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$$

の値を a_0 を用いて表せ。

(4) $\{b_n\}$ を **(2)** で与えた数列とする。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_1 b_k + q_2}$$

の値を r を用いて表せ。