平成 30 年度　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

T 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより５ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ン}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{キ}$ などは既出の $\boxed{キ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + c$$

のグラフを F とし，放物線 F は点 (1, 7) を通るものとする。

このとき，$c = \boxed{アイ}$ であり，放物線 F は 頂点が $\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$ で，2 点 $(7, \boxed{キ})$，$(\boxed{キ}, \boxed{ク})$ を通る。

この $f(x)$ を用いて，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定めると，初項から第 20 項までの和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$$

は $\boxed{ケコ}$ である。また，無限級数

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

は収束して，その和 S は循環小数であり 分数に直すと $S = \dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセソ}}$ となる。

右のページは白紙です。

(2) (a)　三角関数の加法定理により

$$\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{タ}}}-\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{テ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{1}{\boxed{\text{ナ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\right)$$

が分かる。

(b)　係数が実数である 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が 3 つの解 α, β, γ をもち，$\gamma=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{7}{12}\pi\right)$ であるとする。因数定理から ① は適当な実数 p, q に対して

$$(x-\gamma)(x^2+px+q)=0$$

と書ける。複素数平面上で，α の絶対値は 1，偏角 $\arg\alpha$ は $0\leqq\arg\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあり，3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC は直角三角形であるとする。このとき $\arg\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi$ であり，

$$a=\frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}\left(-\boxed{\text{ヒ}}+\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right),\qquad b=\frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}\left(\boxed{\text{ヘ}}-\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}\right)$$

$$c=\frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}\left(-\boxed{\text{マ}}+\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}\right)$$

であることが分かる。

右のページは白紙です。

(3)　座標空間に 2 点

$$A(-3,\ 4,\ 2\sqrt{3}),\qquad B(0,\ 0,\ \sqrt{3})$$

をとり，座標空間の xy 平面上で原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の円の周上の動点を P とする。以下では，動点 P はこの円周全体を動くものとする。

内積 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$ のとり得る値の範囲は

$$-\boxed{ム} \leqq \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP} \leqq \boxed{メ}$$

である。線分 AP の長さの最大値は $\boxed{モ}\sqrt{\boxed{ヤ}}$ であり，最小値は $\boxed{ユ}\sqrt{\boxed{ヨ}}$ である。線分 AP の長さが最大となるのは，点 P の座標が $\left(\dfrac{\boxed{ラ}}{\boxed{リ}},\ -\dfrac{\boxed{ル}}{\boxed{レ}},\ 0\right)$ のときである。また，△ABP の面積の最大値は $\boxed{ロ}\sqrt{\boxed{ワ}}$ であり，最小値は $\boxed{ヲ}\sqrt{\boxed{ン}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ を次で定める。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}} \qquad (x > -7)$$

(1) 座標平面において $y = f(x)$ で定まる曲線を C とする。定数 $a > -7$ に対して，C 上の点 $\mathrm{A}\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ をとる。点 A における曲線 C の接線を ℓ とし，接線 ℓ と x 軸 の交点を P とする。

(a) 点 P の x 座標を a を用いて表せ。

(b) 正の数 m に対して，線分 AP を $1 : m$ に内分する点 Q の x 座標を q とする。このとき，$\dfrac{f(q)}{f(a)}$ を m を用いて表せ。

(2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

とする。

(a) $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f(k) > \int_k^{k+1} f(x)\,dx > f(k+1) \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示し，次に $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して

$$S_n - f(n) > \int_1^n f(x)\,dx > S_n - f(1) \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(b) 定積分 $\displaystyle\int_1^{2018} f(x)\,dx$ の値を求めよ。さらに $N \leqq S_{2018}$ を満たす最大の整数 N を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ a を正の実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}} \qquad (x>0)$$

と定める。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と不定積分 $\displaystyle\int \{f(x)\}^2\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ は次の条件 $(*)$ を満たすものとする。

「$f'(b)=0$ かつ $0<b<1$ を満たす b がただ 1 つ存在する」 $(*)$

(a) このとき a のとり得る値の範囲を求め，$a^{\frac{1}{b}}$ の値を求めよ。

(b) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=b$, $x=1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(a)$ とおく。次の極限を求めよ。

$$\lim_{a\to 1-0}(\log a)\,V(a)$$

ここで，log は自然対数を表す。

(3) 定数 $t \geqq 1$ と正の数 h に対して，

$$0<(a+h)^{\frac{1}{t}}-a^{\frac{1}{t}} \leqq \left(\frac{1}{t}a^{\frac{1}{t}}\right)\frac{h}{a}$$

が成り立つことを示せ。また，次の極限を求めよ。

$$\lim_{h\to +0}\int_1^2 \frac{1}{t}(1+h)^{\frac{1}{t}}\,dt$$

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。