

Z 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ユ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、カ などは既出の カ を表す。

(40 点)

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 7, \quad a_{n+1} = 2a_n + 9^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

まず、 $b_n = \frac{a_n}{9^n}$ とおくことにより

$$b_{n+1} = \frac{\text{ア} b_n + \text{イ}}{\text{ウ}}$$

となる。次に、 $c_n = b_n - \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ とおくと

$$c_{n+1} = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} c_n$$

となる。よって、数列 $\{c_n\}$ は、初項 $c_1 = \frac{\text{クケ}}{\text{コサ}}$ 、公比 $\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ の等比数列である。以上より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\text{シ} \times \text{ス}^{n+\text{セ}} + \text{ソ}^{2n}}{\text{タ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) (a) すべての実数 α に対し,

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\boxed{\text{チ}}} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}} \right)$$

が成り立つ。よって α が $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき,

$$\sin \alpha + \cos \alpha$$

は, $\alpha = \frac{\pi}{\boxed{\text{テ}}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ をとり, $\alpha = \frac{\pi}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最小値 $\boxed{\text{ニ}}$ をとる。

(b) 実数 α, β が $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき,

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

は, $\alpha = \frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}}$ かつ $\beta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ネ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ をとる。

右のページは白紙です。

(3) 1個のさいころを3回投げ、出た目の数を順に a, b, c とする。

積 abc を n とおく。

(a) n が素数となる確率は $\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}} \mid \boxed{\text{フ}}}$ である。ただし、素数とは2以上の自然数で、1とそれ自身以外に正の約数をもたない数である。

(b) n が2の倍数、5の倍数、10の倍数となる確率は、

それぞれ $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$, $\frac{\boxed{\text{マ}} \mid \boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}} \mid \boxed{\text{メ}} \mid \boxed{\text{モ}}}$, $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 平面上に $\triangle OAB$ をとり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

t を正の実数とし、点 P, Q は $\overrightarrow{OP} = -t \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AQ} = -t \overrightarrow{AB}$ を満たす点とする。

また、2 直線 BP, OQ の交点を R とおく。

(1) $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{OQ}$ を、 $\vec{a}, \vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{BR} = k \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{OR} = -\ell \overrightarrow{OQ}$ を満たす実数 k, ℓ を、 t を用いて表せ。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OBR$ の面積を S_2 とおく。 $\frac{S_2}{S_1}$ を t を用いて表せ。

また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 関数 $f(x)$ と曲線 C を

$$f(x) = \frac{4}{x}, \quad C: y = f(x)$$

で定める。定数 a を $a > 2$ を満たすものとして、 C 上の 2 点 $Q(2, f(2))$, $A(a, f(a))$ をとる。点 A における曲線 C の接線を ℓ とし、 ℓ と x 軸の交点を $B(b, 0)$ とする。線分 AB , BQ , および曲線 C の弧 QA で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

- (1) 接線 ℓ の方程式を、 a を用いて表せ。また、 b を a を用いて表せ。
- (2) V を a を用いて表せ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow 2+0} \frac{V}{(a-2)^2}$ の値を求めよ。
- (4) $V = 12\pi$ となるとき、 a の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

