平成29年度　　〔試験時間　100分〕

G 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は**解答用マークシート**にマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の **(1)** から **(3)** において，$\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を**解答用マークシート**にマークせよ。また，$\boxed{}$ 内の英文字にあてはまる + か − の記号を**解答用マークシート**にマークせよ。ただし，0 は +0 で表すものとする。また，分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形で表すものとする。なお，問題文中の $\boxed{ム}$ は既出の $\boxed{ム}$ を表す。

(40 点)

(1) x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は

$$\boxed{(a)}\ \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq a \leqq \boxed{(b)}\ \boxed{ウ}$$

である。

a がこの範囲の値をとるとき，上の 2 次方程式の解 x がとり得る値の範囲は

$$\boxed{(c)}\ \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \leqq x \leqq \boxed{(d)}\ \boxed{カ}$$

である。

方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ を満たす整数の組 $(x,\ a)$ は全部で $\boxed{キ}$ 個ある。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) 座標平面において，放物線 C : $y = x^2$ 上に異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとり，それぞれの点における接線を順に ℓ，m，n とする。また，m と n の交点を P，n と ℓ の交点を Q，ℓ と m の交点を R とする。

R の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}b,\ \boxed{\text{シ}}\,ab\right)$ である。

R から直線 PQ に下した垂線の方程式は

$$x + \boxed{\text{ス}}\,cy = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}b + \boxed{\text{ツ}}\,abc$$

であり，Q から直線 PR に下した垂線の方程式は

$$x + \boxed{\text{テ}}\,by = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}c + \boxed{\text{ネ}}\,abc$$

である。

△PQR の垂心の y 座標は，a，b，c の値にかかわらず，つねに $\boxed{\text{(e)}}\ \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 以下において，e は自然対数の底であり，$2 < e < 3$ を満たす。

座標平面上で曲線 $y = e^x$ と直線 $y = \dfrac{x}{e} + 1$ で囲まれた図形の面積を S とする。

方程式 $e^x = \dfrac{x}{e} + 1$ の 0 でない実数解を a とすると

$$S = \boxed{(\mathrm{f})}\ \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\ \frac{a^2}{e}\ \boxed{(\mathrm{g})}\ \boxed{\text{ヘ}}\ \frac{a}{e}\ \boxed{(\mathrm{h})}\ \boxed{\text{ホ}}\ a$$

が成り立つ。また $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x\,dx = \boxed{\text{マ}} - \frac{\boxed{\text{ミ}}}{e}$ なので，a の値を計算しなくても

$$\boxed{\text{ム}} < S < \boxed{\text{ム}} + 1$$

であることがわかる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a, b は実数の定数で，$\cos a > 0$ とする。 (30 点)

(1) x の 2 次方程式

$$x^2 - 2x\cos a\cos b + \cos^2 a = 0$$

の解を極形式で表せ。

(2) x の 2 次方程式

$$x^2\cos^2 a - 2x\cos a\cos b + 1 = 0$$

の解を極形式で表せ。

(3) a, b が $-\dfrac{\pi}{3} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{3}$, $0 \leqq b < 2\pi$ の範囲を動くとき，**(1)** の解がとり得る値全体の集合は，複素数平面上のある領域 S_1 になる．また，**(2)** の解がとり得る値全体の集合は，ある領域 S_2 になる。S_1 と S_2 を図示せよ。

(4) S_1, S_2 は **(3)** で定めた領域とする。2 つの複素数 α, β について，α が S_1 上，β が S_2 上を動くとき，$\alpha\beta$ がとり得る値全体の集合は，複素数平面上のある領域 S になる。S を図示せよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$ $f(x) = \sin(\pi \cos x)$ で定められた関数 $f(x)$ に対して，次の問いに答えよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す。 (30 点)

(1) $f(\pi + x) - f(\pi - x)$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f(x) = 0$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f'(x) = 0$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(4) $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ の値を求めよ。

(5) $\dfrac{\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx}$ の値を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。