平成 29 年度　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

Y 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　　意〕

⑴　試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

⑵　監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

⑶　解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

⑷　解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは，横 1 行について 1 箇所に限ります。
2 箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤　解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

⑸　試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

⑹　問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ハ}$ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{ソ}$ などは既出の $\boxed{ソ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) 3 次関数 $f(x)$ を，$x = 1, 4$ で極値をとり，$f(0) = 2$ と $f''(0) = -30$ を満たすものとする。ここで $f''(x)$ は $f(x)$ の第 2 次導関数を表す。このとき，

$$f(x) = \boxed{ア}x^3 - \boxed{イ\,ウ}x^2 + \boxed{エ\,オ}x + \boxed{カ}$$

となる。

(2) a を定数として，3 次関数 $g(x) = x^3 - ax^2 + 4x - 3$ が極値をもつのは，$|a| > \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ のときである。次に，$a > 0$ とする。$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ について，方程式 $g'(x) = 0$ の解がただ 1 つのとき，その解は

$$x = \frac{\boxed{ケ}}{\sqrt{\boxed{コ}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(3) 次の不定積分を求めると，

$$18\int x^2 \log x\,dx = \boxed{\text{サ}}\,x^{\boxed{\text{シ}}}\log x - \boxed{\text{ス}}\,x^{\boxed{\text{セ}}} + C$$

となる。ただし，log は自然対数を表し，C は積分定数を表す。

(4) $x > 0$ に対し，

$$f(x) = 3\int_{3}^{x+3} \left|(t-3)^2 - 4\right|\,dt$$

を求めると，$0 < x \leqq \boxed{\text{ソ}}$ のとき，

$$f(x) = -x^3 + \boxed{\text{タチ}}\,x$$

となり，$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき，

$$f(x) = x^3 - \boxed{\text{ツテ}}\,x + \boxed{\text{トナ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(5) $1, 5, 5^2, \cdots, 5^{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ を順番に並べて得られる次の数列を考える。

$$1,\ 1, 5,\ 1, 5, 5^2,\ 1, 5, 5^2, 5^3,\ 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, \cdots$$

(a) 第 40 項は $5^{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

(b) 初項から第 777 項までに，1 である項は $\boxed{\text{ヌ}\ \text{ネ}}$ 個ある。

(c) 自然数 n に対し，初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n \geqq 1000$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{ノ}\ \text{ハ}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標平面上に，中心が点 $(0,1)$，半径が 1 の円がある。この円周上の定点 P は最初，原点にあるとして，この円が x 軸上を正の方向にすべることなく回転するとき，点 P の描く曲線を C とする。円の回転した角を θ とするとき，点 P の座標は $(\theta-\sin\theta, 1-\cos\theta)$ で与えられる。

(1) $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ とおく。$0<\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

(2) $0<\theta<2\pi$ のとき，点 P における曲線 C の法線と，x 軸の交点を Q とする。線分 PQ の長さが最大となる点 P の座標を求めよ。

(3) $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 定数 $c > 0$ に対し，$f(x) = e^{-cx}$ とおく。ここで，e は自然対数の底である。

(1) 方程式 $x = f(x)$ は $0 < x < 1$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，$a_1 = 1$ とし，$n \geqq 1$ に対し，$a_{n+1} = f(a_n)$ と定める。また，α を (1) の解とする。

(2) すべての自然数 n に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqq c\,|a_n - \alpha|$$

以下，$0 < c < 1$ とする。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ。

(4) 座標平面において，点

$$(a_1, a_2),\ (a_2, a_2),\ (a_2, a_3),\ (a_3, a_3),\ (a_3, a_4),\ (a_4, a_4),\ \cdots$$

を順に線分で結び，$(2n-1)$ 本目までの線分の長さの和を S_n とおく。すなわち，

$$S_n = |a_1 - a_2| + 2\left(|a_2 - a_3| + \cdots + |a_n - a_{n+1}|\right)$$

である。このとき，次が成り立つことを示せ。

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して，} S_n < \frac{1+c}{1-c}(1 - e^{-c})$$

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。