平成28年度　〔試験時間　100分〕

J 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。

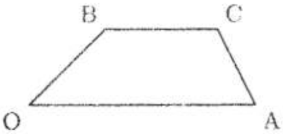
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

以下の問題 $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ において，$\boxed{}$ 内のカタカナの 1 文字にあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数で表しなさい。また，根号内の $\boxed{}$ に対しては，根号の中に現れる正の整数が最小となる形で答えなさい。なお，$\boxed{\text{ア}}$ のようなカタカナ 1 文字は 1 桁(けた)の数を表し，$\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{アイウ}}$ のようなカタカナ 2 文字, 3 文字は, それぞれ 2 桁, 3 桁の数を表すものとします。$\boxed{\text{ア}}$ などは既出の $\boxed{\text{ア}}$ などを表すものとします。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点)

図の四角形 OACB は, OA // BC である台形である。辺 BC の長さは辺 OA の長さの $\dfrac{1}{2}$ である。辺 OA を 3 : 2 に内分する点を D, 辺 OB を 4 : 3 に内分する点を E とする。このとき, 辺 AC 上の点 F, 辺 BC 上の点 G で, DE // FG, DE = FG をみたすものが存在する。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。



(1)

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\vec{b}$ である。

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = -\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}$ である。

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}\vec{a}+\vec{b}$ である。

(4)

$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$, $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ である。

右のページは白紙です。

$\boxed{2}$ (15点)

(1) 3枚のカードに1から3までの数字が1枚に1つずつ書かれている。この中から2枚のカードを抜き取るとき，大きい方の数字を X，小さい方の数字を Y とする。$X=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。また，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$Y=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(2) 6枚のカードに1から6までの数字が1枚に1つずつ書かれている。この中から2枚のカードを抜き取るとき，大きい方の数字を X，小さい方の数字を Y とする。$X=5$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$，$X=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。$X=4$ となる確率と $Y=\boxed{セ}$ となる確率とは等しい。

(3) n を6より大きい自然数とする。n 枚のカードに1から n までの数字が1枚に1つずつ書かれている。この中から2枚のカードを抜き取るとき，大きい方の数字を X，小さい方の数字を Y とする。$X \geqq 7$ となる確率は $\dfrac{\left(n+\boxed{ソ}\right)\left(n-\boxed{タ}\right)}{n\left(n-\boxed{チ}\right)}$ である。

右のページは白紙です。

3 (15点)

複素数 z が等式 $z\bar{z}+(-3+4i)z-(3+4i)\bar{z}-50=0$ を満たすとする。ここで，i は虚数単位，$\bar{z}$ は z の共役複素数である。

(1) 複素数平面上で，等式を満たす点 z の全体の集合は中心が $\boxed{ア}+\boxed{イ}i$，半径が $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ の円を表す。

(2) 等式を満たす z について，絶対値 $|z|$ の最大値は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}+\boxed{キ}$，最小値は $\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}$ となる。

(3) (2) で $|z|$ の最大値を与える z を α，最小値を与える z を β とする。$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}$ によって γ を定めるとき，γ の絶対値 $|\gamma|$ は $\boxed{サ}+\sqrt{\boxed{シ}}$，偏角 $\arg\gamma$ は $\boxed{ス}$ である。ただし，$\boxed{ス}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑨の中から選べ。

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$　⑥ $\dfrac{3\pi}{4}$　⑦ $\dfrac{5\pi}{6}$　⑧ π　⑨ $\dfrac{3\pi}{2}$

(4) 複素数 α,β,γ を (3) で定めたものとし，複素数平面上で α,β,γ が表す点をそれぞれ A, B, C とすると，三角形 ABC の面積は $\boxed{セソ}+\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$ となる。

右のページは白紙です。

$\boxed{4}$ (15 点)

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とおく。半径 $\frac{1}{3}$ の円 C_2 が円 C_1 に外接しながら反時計回りにすべることなく回転する。円 C_2 の中心 O′ は時刻 0 において点 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ の位置にあり，一定の速さで原点 O のまわりを 1 周し，時刻 2π のとき点 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ へ戻る。円 C_2 上の定点 P は，時刻 0 において点 $(1, 0)$ の位置にあり，C_2 の回転にともなって移動する (図 1, 図 2, 図 3)。

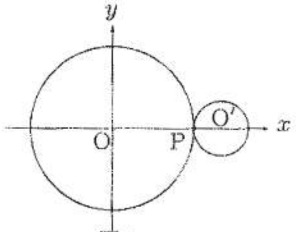


図 1

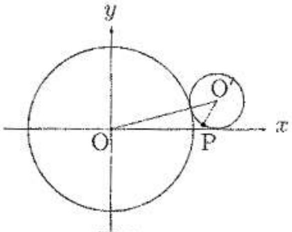


図 2

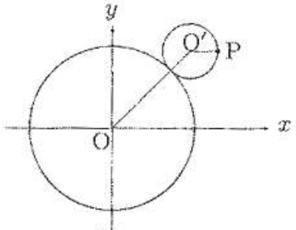


図 3

(1) 時刻 $\frac{\pi}{4}$ における点 O′ の位置は $\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}, \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\right)$ である。

また，時刻 $\frac{\pi}{4}$ における点 P の位置は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

である (図 3)。

(2) 時刻 t における点 O′ の位置は $\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\cos t, \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sin t\right)$ である。また，

時刻 t における点 P の位置は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\cos t - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\cos\left(\boxed{\text{ソ}}\,t\right), \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sin t - \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sin\left(\boxed{\text{ツ}}\,t\right)\right)$$

である。

(3) 点 P が点 $(1, 0)$ から動き始めて，円 C_1 上の点に初めて達するのは，時刻が

$T = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi$ のときである。

(4) 時刻 0 から (3) で求めた時刻 T までの点 P の道のりは $\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{5}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{5}$ (40点)

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{e}} - \log x \quad (x > 0)$$

と定め，関数 $f(x)$ と座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を考える。ただし，e は自然対数の底，log は自然対数を表すとする。以下の設問に答えよ。

(1) $f(e)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ は最小値をもつ。その最小値とそれを与える x の値を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(9e, f(9e))$ における接線の傾きを求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ 上の点に，点 $(9e, f(9e))$ における接線と同じ傾きの接線をもつ点がもう一つある。その点の x 座標を求めよ。

(5) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = \dfrac{e}{9}$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(6) 自然数 n に対し，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = \dfrac{e}{n}$，および x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を証明なしに使ってよい。