平成28年度　　〔試験時間　100分〕

S 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ロ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{ウ}$ などは既出の $\boxed{ウ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) **(a)** x, y に関する方程式

$$8x^2 + 24xy + 18y^2 - 6x - 9y - 20 = 0 \qquad ①$$

を考える。$A = 2x + 3y$ とおくと，① は

$$\boxed{ア}A^2 - \boxed{イ}A - 20 = 0$$

と表される。したがって，x, y が整数で①を満たすとすると $A = \boxed{ウ}$ である。これより，$2x + 3y = \boxed{ウ}$ を満たす整数の組 (x, y) のうち，$|x + y|$ が最小になるのは $(x, y) = (-\boxed{エ}, \boxed{オ})$ のときで，$|x + y|$ が 2 番目に小さくなるのは

$$(x, y) = (-\boxed{カ}, \boxed{キ}), \quad (-\boxed{ク}, \boxed{ケ})$$

のときである。ただし，$\boxed{キ} < \boxed{ケ}$ とする。

(b) $f(n) = n^4 - 27n^2 + 121$ とすると

$$f(n) = (n^2 + \boxed{コ}n + \boxed{サ\,シ})(n^2 - \boxed{ス}n + \boxed{セ\,ソ})$$

と因数分解される。したがって，$|f(n)|$ が素数となるような自然数 n はちょうど $\boxed{タ}$ 個存在する。また，それら $\boxed{タ}$ 個の素数 $|f(n)|$ の和は $\boxed{チ\,ツ\,テ}$ である。ただし，素数とは 正の約数が 1 とその数自身のみであるような 2 以上の自然数である。

右のページは白紙です。

(2) 空間内に四面体 ABCD がある。△ABC の外心を P とし，点 D から平面 ABC に下ろした垂線が平面 ABC と交わる点を H とする。このとき，線分 AH の上に点 P があるものとする。さらに，四面体 ABCD の体積が $3\sqrt{5}$ であり，

$$\mathrm{AB}=4,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{10},\quad \mathrm{CA}=3\sqrt{2},\quad \mathrm{DA}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

であるとする。

(a) △ABC において，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{ナ}$ である。また，△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{ニ}}$ である。

(b) 以下では 平面 ADH 上で考える。体積の条件から $\mathrm{DH}=\dfrac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}}{2}$ がわかり，△DAH において $\mathrm{AH}=\dfrac{\boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハ}}}{2}$ だから $\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{\boxed{ヒ}}}{2}$ である。点 P を通り 直線 AH に直交する直線を ℓ とし，線分 DA の垂直二等分線と ℓ の交点を Q とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}+q\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくと，

$$p=\frac{1}{\boxed{フ}},\quad q=\frac{1}{\boxed{ヘ}},\quad \mathrm{AQ}=\frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$$

がわかる。点 Q は 4 点 A, B, C, D から同じ距離にあるので，Q を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$ の球面は四面体 ABCD に外接していることがわかる。

右のページは白紙です。

(3) 複素数 z $(z \neq 0)$ に対して， $w = z + \dfrac{1}{z}$ とし， $w = x + yi$ (w の実部を x, 虚部を y) とする。ただし，i は虚数単位を表すものとする。

(a) 複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1+2i)t$ $(t > 0)$ 上を動くとする。このとき，$w = x + yi$ に対して

$$x = \frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}\,t} + t, \qquad y = -\frac{\boxed{メ}}{\boxed{モ}\,t} + \boxed{ヤ}\,t$$

が成立し，点 (x, y) は，双曲線

$$\frac{\boxed{ユ}}{\boxed{ヨ}}x^2 - \frac{\boxed{ラ}}{\boxed{リ}\boxed{ル}}y^2 = 1$$

上を動く。

(b) k を正の実数とする。複素数平面上で点 z が半直線 $z = (1+ki)t$ $(t > 0)$ 上を動くとき，点 w が

$$|w+2| - |w-2| = 1$$

を満たすとする。このとき $k = \sqrt{\boxed{レ}\boxed{ロ}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 正の実数 s に対し，3 次関数 $f(x)$ と曲線 C を

$$f(x) = x^3 - sx, \qquad C : y = f(x)$$

で定める。p を正の実数とし，C 上の点 $\mathrm{P}\bigl(p,\ f(p)\bigr)$ における C の接線を ℓ_1 とする。接線 ℓ_1 と C との共有点で P と異なる点を Q とし，Q における C の接線を ℓ_2 とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) 2 つの直線 ℓ_1 と ℓ_2 が直交するような C 上の点 $\mathrm{P}\bigl(p,\ f(p)\bigr)$ $(p > 0)$ がただ 1 つ存在するときの s の値を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 $\mathrm{R}_1\bigl(2,\ f(2)\bigr)$ をとり，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 R_n から点 R_{n+1} を次の規則で定める。

「点 R_n を通る直線で R_n 以外の点で C に接するものを考え，その接点を R_{n+1} とする。」

点 R_n の 座標を $(x_n,\ y_n)$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ の値を s を用いて表せ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 実数 a に対し，座標平面における 2 つの曲線

$$C_1 : y = e^{x+a}, \qquad C_2 : y = \log x - a$$

を考える。ここで，e は自然対数の底で，$\log x$ は自然対数である。

(1) 曲線 C_1 上に点 P をとり，P における C_1 の接線の方程式を $y = px + q$ とする。このとき，すべての実数 x に対して

$$e^{x+a} \geqq px + q$$

が成り立つことを示せ。

(2) 曲線 C_1 の接線で，直線 $y = x$ に平行なものの方程式を a を用いて表せ。

(3) 曲線 C_1 と C_2 が共有点をもたないような，a の値の範囲を求めよ。

(4) **(3)** の条件の下で，C_1 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ e^{1+a})$ と C_2 上の点 $\mathrm{P}_2(e^{1+a},\ 1)$ をとる。このとき，x 軸，曲線 C_2，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，曲線 C_1，y 軸で囲まれた図形の面積を S として，$S = \dfrac{4}{e} - \dfrac{1}{2}$ となるような a の値を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

◇M35(210—631)