平成 28 年度　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

R 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（HBまたはB）を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

◇M32（210—543）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ロ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{コ}$ などは既出の $\boxed{コ}$ を表す。

(40 点)

(1) 空間ベクトル $\overrightarrow{a}=(s,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(0,t,0)$，$\overrightarrow{c}=(0,0,u)$ $(s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0)$ と，正の定数 p を考える。このとき，$s+2t=p$ となるよう s,t が動くときの $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ の最小値を求める。

$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\boxed{ア}\,t^2-\boxed{イ}\,pt+p^2 \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{p}{2}\right)$$

より，$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ は $t=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}p$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{オ}}{\sqrt{\boxed{カ}}}p$ をとる。

また，$s+2t+3u=p$ となるよう s,t,u が動くとき，$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right|$ の最小値は $\dfrac{\boxed{キ}}{\sqrt{\boxed{ク}\boxed{ケ}}}p$ となる。

右のページは白紙です。

(2) n を自然数とする。まず $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$ に対し，

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

を求める。4 次多項式 $F(x)$ で

$$F(x)-F(x-1)=f(x), \qquad F(0)=0$$

を満たすものを考えると

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}\bigl(F(k)-F(k-1)\bigr)$$

より，

$$\begin{aligned} S(n)&=\frac{1}{\boxed{コ}}\left(n^4+\boxed{サシ}\,n^3+\boxed{スセ}\,n^2+\boxed{ソタ}\,n\right)\\ &=\frac{1}{\boxed{コ}}\,n\left(n+\boxed{チ}\right)\left(n+\boxed{ツ}\right)\left(n+\boxed{テ}\right)\end{aligned}$$

をえる。ただし，$\boxed{チ}<\boxed{ツ}<\boxed{テ}$ とする。

次に，$g(x)=12x^3+15x^2-25x-14$ に対して，同様にして $T(n)=\sum_{k=1}^{n} g(k)$ を求めると

$$\begin{aligned} T(n)&=\boxed{ト}\,n^4+\boxed{ナニ}\,n^3-\boxed{ヌ}\,n^2-\boxed{ネノ}\,n\\ &=n\left(n+\boxed{ハ}\right)\left(n+\boxed{ヒ}\right)\left(\boxed{フ}\,n-\boxed{ヘ}\right)\end{aligned}$$

となる。ただし，$\boxed{ハ}<\boxed{ヒ}$ とする。

このとき，$T(n)$ が $S(n)$ の倍数となるような自然数 n の最小値は $\boxed{ホマ}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 以下では C は積分定数を表すものとする。

部分積分を用いることにより，関数 $\dfrac{x^3}{\sqrt{2x^2+3}}$ の不定積分は

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \int \frac{x^2}{\boxed{\text{ミ}}}\left(\sqrt{2x^2+3}\right)'dx$$
$$= \frac{1}{\boxed{\text{ム}}}\left(x^2 - \boxed{\text{メ}}\right)\sqrt{2x^2+3} + C$$

と求められる。ただし，$\left(\sqrt{2x^2+3}\right)'$ は $\sqrt{2x^2+3}$ の導関数を表す。

同様にして $\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ の不定積分を求める。

$$\sin 4x = \boxed{\text{モ}}\left(1 - \boxed{\text{ヤ}}\sin^2 x\right)\sin x\cos x$$

に注意すれば

$$\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{3}\left(\boxed{\text{ヨ}} - \boxed{\text{ラ}}\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x} + C$$

となる。したがって区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ での定積分は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \boxed{\text{リ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ル}}} - \frac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}\right)$$

と求まる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標空間において，原点Oと，3点 A$(1,0,0)$，B$(0,2,0)$，C$(0,0,-3)$ があり，これら4点O, A, B, Cを頂点とする三角錐を考える。この三角錐を xy 平面上の次で指定する直線の周りに回転する。このとき，回転後の三角錐の $z \leqq 0$ の範囲にある部分の体積を V とし，xy 平面での切り口の面積を S とする。ただし，回転後の三角錐全体が $z \geqq 0$ の範囲にあるときは $V=0$ とする。

(1) 三角錐 OABC を x 軸の周りに回転する。ただし，点Bにある頂点は点B$'$に移るとして，B$'$ が $z \geqq 0$ の範囲にあるようにする。このとき，y 軸と辺OB$'$のなす角度を θ とし，θ は $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(a) S と V を θ を用いて表せ。

(b) $V = \dfrac{1}{2}$ となる θ を α とするとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(2) 三角錐 OABC を直線 AB の周りに回転する。ただし，原点にある頂点は点Pに移るとして，Pが $z \geqq 0$ の範囲にあるようにする。面 PAB と xy 平面のなす角を θ とし，θ は $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(a) 原点Oから辺ABに垂線を下ろし，垂線とABの交点をHとする。線分OHの長さを求めよ。

(b) $V=0$ となる θ の最小値を β とするとき，$\tan\beta$ を求めよ。
また，$0 \leqq \theta < \beta$ の範囲での V を θ を用いて表せ。

(30点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 定数 a に対して，

$$f(x) = x^2 + 2ax, \qquad F(x) = e^{-f(x)}$$

と定める。ただし，e は自然対数の底である。

実数 t, p に対して座標平面に 3 点 $\mathrm{T}(t, 0)$, $\mathrm{P}(p, 0)$, $\mathrm{Q}(p, F(p))$ をとり，$\triangle\mathrm{TPQ}$ を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。ただし，$p = t$ のときは $V = 0$ とする。

t を固定して，$p \neq t$ の範囲で p を動かしたとき，V が極値をとる p は 2 つある。それらを α, β $(\alpha < \beta)$ とおき，その極値をそれぞれ，V_α, V_β とする。

(1) V を a, t, p を用いて表せ。また，α, β をそれぞれ a, t を用いて表せ。

(2) 積 $(t-\alpha)(t-\beta)$ の値を求めよ。また，t を固定して p を動かすときの V の増減を調べよ。

(3) $\log(V_\alpha V_\beta)$ を t の多項式として表し，点 T が x 軸上を動くときの 積 $V_\alpha V_\beta$ の最大値を求めよ。ただし，$\log$ は自然対数を表す。

(30 点)

右のページは白紙です。