

Q 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の **ア** から **ン** までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) $a_1 = -400$ から 2 ずつ増えていく数列 $\{a_k\}$ を次のような群に分け、第 n 群には n 個の数が入るようにする。

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & | & a_2, a_3 & | & a_4, a_5, a_6 & | & a_7, a_8, a_9, a_{10} & | & \cdots \\ \text{第 1 群} & & \text{第 2 群} & & \text{第 3 群} & & \text{第 4 群} & & \end{array}$$

ただし

$$a_1 = -400, a_2 = -398, a_3 = -396, \dots$$

このとき、第 1 群から第 9 群までに入る数の個数は **ア イ** 個であり、第 10 群の最初の数は **ウ エ オ** である。また、第 10 群に入るすべての数の和は **カ キ ク ケ** である。さらに、第 n 群の最初の数は $n^2 - n -$ **コ サ シ** である。 $a_k = 0$ となるのは $k =$ **ス セ ソ** のときである。また $a_k = 0$ となる a_k は第 **タ チ** 群の第 **ツ テ** 番目である。

右のページは白紙です。

- (2) 赤玉 1 個, 白玉 2 個, 黒玉 3 個が入っている袋がある。この袋から玉を 1 個取り出し, 色を見てからもとの袋へもどす操作を行う。

- (a) 操作を 3 回行うとき, 白玉がちょうど 2 回出る確率は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

以下では, 操作を k 回行う。ただし, $k \geq 2$ とする。

- (b) 白玉が $(k-1)$ 回以上出る確率は

$$\frac{\boxed{\text{ニ}}^k + \boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}^k}$$

である。

- (c) 少なくとも 2 回は黒玉が出る確率は

$$\frac{\boxed{\text{ノ}}^k - k - \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}^k}$$

である。

- (d) l 回目 ($l = 1, 2, \dots, k$) の操作に対して, 出た玉の色に応じて点 w_l が与えられる。 w_l は赤玉が出たら 2 点, 白玉が出たら 1 点, 黒玉が出たら 0 点とする。合計得点 $w_1 + w_2 + \dots + w_k$ が 3 以上となる確率は

$$1 - \frac{1}{\boxed{\text{フ}}^k} \left(\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} k^2 + \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} k + \boxed{\text{ム}} \right)$$

である。

右のページは白紙です。

(3) z を絶対値が 1, 偏角が $\frac{3\pi}{5}$ の複素数とする。 $t = z + \frac{1}{z}$ とおくと

$$t = \boxed{\times} \cos \frac{\boxed{\text{モ}} \pi}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

となる。また, $z^5 = -\boxed{\text{ユ}}$ であり,

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + \boxed{\text{ヨ}} = 0$$

である。よって

$$t = \frac{\boxed{\text{ラ}} - \sqrt{\boxed{\text{リ}}}}{\boxed{\text{ル}}}$$

である。また

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \boxed{\text{レ}} \cos \frac{\pi}{\boxed{\text{ロ}}}$$

となり

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\boxed{\text{ワ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヲ}}}}{\boxed{\text{ン}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 θ は $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ を満たす実数とし、 $s = \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta$ とする。座標平面において円 C を

$$(x-s)^2 + \left(y - \frac{1}{s}\right)^2 = \left(\sqrt{2+s} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1$$

とする。また、 $t = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ とおく。

(1) t の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) s を t を用いて表せ。

(3) θ が与えられた範囲を動くとき、円 C の面積を最大にする θ の値を θ_m とする。
 θ_m を求めよ。

(4) $\theta = \frac{\pi}{4}$ とする。点 (x, y) が円 C 上を動くとき、 $x + y$ の最小値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 a を正の定数とし、 $0 \leq x \leq 1$ における関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{a} (1 - x^{a+1} - (1-x)^{a+1})$$

と定める。 $f(x)$ の最大値を m とする。

(1) m を a を用いて表せ。

(2) $a = 2$ とし、 b を定数とする。 $0 \leq x \leq 1$ における関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) + 2m \left| x - \frac{1}{2} \right| - b$$

とする。方程式 $g(x) = 0$ が $0 \leq x \leq 1$ で 4 つの異なる実数解をもつような b の範囲を求めよ。

(3) a を正の定数とする。 $0 \leq x \leq 1$ において、 $y = f(x)$ のグラフと

$$y = -2m \left| x - \frac{1}{2} \right| + m$$

のグラフで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(4) (3) で求めた S に対して、 $\lim_{a \rightarrow +0} S$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。