平成28年度　〔試験時間　100分〕

U 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより6ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ の各問題文中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, … に当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，値が根号を含む場合は，根号の中にあらわれる自然数が最小になる形で表すものとする。また，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{ア}$ などは既出の $\boxed{ア}$ などを表す。

$\boxed{1}$ 方程式

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1$$

の整数解で条件 $0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ をみたすものを考える。

(1) $n=2$ のとき，条件をみたす整数解 (x_1, x_2) の個数は $\boxed{ア}$ 個である。

(2) $n=3$ のとき，条件をみたす整数解 (x_1, x_2, x_3) の個数は $\boxed{イ}$ 個であり，それらの解のうち $x_1+x_2+x_3$ の値が最も大きいものは $(x_1, x_2, x_3)=(\boxed{ウ}, \boxed{エ}, \boxed{オ})$ である。

(3) $n=4$ のとき，条件をみたす整数解 (x_1, x_2, x_3, x_4) の x_4 で最も大きい値は $\boxed{カキ}$ である。また，条件をみたす整数解で $x_4=12$ のものは $\boxed{ク}$ 個ある。この $\boxed{ク}$ 個の解のうち，x_3 の値が最も小さいのは

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(\boxed{ケ}, \boxed{コ}, \boxed{サ}, 12)$$

である。

(15 点)

右のページは白紙です。

$\boxed{2}$ x の関数

$$f(x) = |x+1| - |x-1| + |x-2|$$

を考える。

(1) 不等式 $f(x) < \dfrac{3}{2}$ の解は

$$-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} < x < -\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である。

(2) 実数 k に対して，方程式 $f(x) = k$ がちょうど 3 個の解をもつのは $k = \boxed{オ}$ と $k = \boxed{カ}$ のときである。ただし $\boxed{オ} < \boxed{カ}$ とする。

(3) 方程式 $f(x) = \dfrac{17}{19}\sqrt{5}$ の解の個数は $\boxed{キ}$ 個である。

(4) 実数 t に対して

$$I(t) = \int_t^{t+1} (f(x))^2 dx$$

とおく。

(a) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$I(t) = -\boxed{ク}\,t^2 + \boxed{ケ}\,t + \frac{\boxed{コ\,サ}}{\boxed{シ}}$$

(b) $1 \leqq t \leqq 2$ のとき，

$$I(t) = \boxed{ス}\,t^2 - \boxed{セ\,ソ}\,t + \frac{\boxed{タ\,チ}}{\boxed{ツ}}$$

(c) $0 \leqq t \leqq 2$ で考えると，$I(t)$ は $t = \dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ において，最大値 $\dfrac{\boxed{ナ\,ニ}}{\boxed{ヌ\,ネ}}$ をとる。

(20 点)

右のページは白紙です。

$\boxed{3}$ さいころを n 回投げ，第1投目から第 n 投目までに出たすべての目の積を a_n とする。例えば $n=3$ で，第1投目と第2投目に「3」が出て，第3投目に「6」が出た場合 $a_3 = 3 \times 3 \times 6 = 54$ である。

(1) a_n が5の倍数または3の倍数である確率は $1 - \left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right)^n$ である。

(2) a_n が5の倍数であるが，3の倍数でない確率は $\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)^n$ である。

(3) a_n が15の倍数である確率は $1 + \left(\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\right)^n$ である。ただし $\boxed{コ} < \boxed{シ}$ とする。

(4) a_n が3の倍数であるが，2の倍数でない確率は $\left(\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\right)^n$ である。

(5) a_n が2の倍数であるが，5の倍数でない確率は $\left(\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\right)^n$ である。

(6) a_n が30の倍数である確率を q_n とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1 - q_n) = \log \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$$

である。ただし，対数は自然対数を表すものとする。

(15点)

右のページは白紙です。

4

関数 $f(x), g(x), h(x)$ を

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$
$$g(x) = -x + \frac{5}{4}$$
$$h(x) = x^2 - x - 1$$

により定める。

(1) $f(x) > 0$ かつ $g(x) > 0$ かつ $h(x) > 0$ となる x の値の範囲は

$$-\boxed{ア} < x < \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}} - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\sqrt{\boxed{カ}}$$

である。

(2) x が **(1)** で求めた範囲にあるとき，3 辺の長さがそれぞれ $f(x), g(x), h(x)$ であるような三角形ができるための条件は

$$\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} - \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\sqrt{\boxed{サシ}} < x < \boxed{ス} - \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\sqrt{\boxed{タチ}}$$

である。

(3) **(2)** で作られた三角形が二等辺三角形となるような x の値は $\boxed{ツ}$ 個ある。作られた三角形が正三角形になるときの x の値は $x = -\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ であり，その正三角形の 1 辺の長さは $\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。またその正三角形の外接円の直径は $\frac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}\sqrt{\boxed{ヒ}}$ である。

(15 点)

右のページは白紙です。

5 自然数 n に対し，整式 x^n を整式 x^4+1 で割った余りを $g_n(x)$ とする。

(1) 方程式 $x^4+1=0$ の解のうち，偏角が一番小さいもの α は

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,i$$

である。ただし，i は虚数単位で，複素数の偏角は 0 以上 2π 未満の範囲で考えるものとする。

(2) $g_5(x), g_6(x), g_7(x)$ は

$$g_5(x) = -\boxed{\text{キ}}x^3 - \boxed{\text{ク}}x^2 - \boxed{\text{ケ}}x - \boxed{\text{コ}}$$
$$g_6(x) = -\boxed{\text{サ}}x^3 - \boxed{\text{シ}}x^2 - \boxed{\text{ス}}x - \boxed{\text{セ}}$$
$$g_7(x) = -\boxed{\text{ソ}}x^3 - \boxed{\text{タ}}x^2 - \boxed{\text{チ}}x - \boxed{\text{ツ}}$$

である。

(3) $g_{2016}(x)$ は

$$g_{2016}(x) = \boxed{\text{テ}}x^3 + \boxed{\text{ト}}x^2 + \boxed{\text{ナ}}x + \boxed{\text{ニ}}$$

である。

以下では，α は **(1)** で求めたものとする。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{31} g_k(\alpha) = \alpha^{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{94} (g_k(\alpha))^3$ の虚部は $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1003} (g_k(\alpha))^4$ の 実部は $-\boxed{\text{ヒ}}$，虚部は $\boxed{\text{フ}}$ である。

(15 点)

右のページは白紙です。

6

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x の範囲を定義域とする関数

$$f(x) = \frac{\sin 4x + 2\sin 2x\cos x}{\sin x}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $f(x) = 0$ の解は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ と $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である。ただし $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} < \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ とする。

(3) $f(x)$ は $x = a$ で最小値をとるとする。このとき

$$\cos a = -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

$$f(a) = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}} - \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} - \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\pi$$

である。

(20 点)

右のページは白紙です。