平成 28 年度　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

# C 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。

ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は**解答用マークシート**にマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ヨ}$ において，$\boxed{\phantom{ア}}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数を**解答用マークシート**にマークせよ。ただし，$\boxed{\phantom{ア}}$ は1桁の数，$\boxed{\phantom{ア}\ \phantom{ア}}$ は 2 桁の数，$\boxed{\phantom{ア}\ \phantom{ア}\ \phantom{ア}}$ は 3 桁の数を表す。値が根号を含む場合は，根号の中にあらわれる自然数が最小になる形で表すものとする。また，分数は既約分数として表すものとする。

(50 点)

(1) 6 つの四角形の面をもつ多面体がある。最初に 6 つの面のうち 2 つの面を選んで緑に塗り，さらに残りの 4 つの各面を白，黒，赤，青 の 4 色のうちの 1 つの色で塗り，これらの 4 つの面すべてが異なる色になるように塗り分ける方法を考える。

(a) この多面体が，立方体である場合，このように塗り分ける方法は全部で $\boxed{アイ}$ 通りある。ただし，すべての正方形の面は塗られた色以外では区別がつかないものとする。また，回転させて一致するものは同じものとみなす。

次に，この多面体の各面を，白，黒，赤，青，緑，黄の 6 色のうちの 1 つの色で塗り，すべての面が異なる色になるように塗り分ける方法を考える。

(b) この多面体が，4 つの正方形の面をもち，残りの平行な 2 つの面は正方形でないひし形である場合，このように塗り分ける方法は全部で $\boxed{ウエオ}$ 通りある。ただし，4 つの正方形の面は塗られた色以外では区別がつかない面であり，2 つのひし形の面も塗られた色以外では互いに区別がつかない面であるとする。また，回転させて一致するものは同じものとみなす。

**右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。**

(2) 座標空間に 4 つの点 $P(0,0,2), A(2,0,0), B(-1,\sqrt{3},0), C(-1,-\sqrt{3},0)$ をとる。

(a) 線分 PA，線分 PB，線分 PC のそれぞれと平面 $z=\dfrac{4}{3}$ との交点を $A', B', C'$ とおくと，

$$A'\left(\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}},\ \boxed{ク},\ \frac{4}{3}\right)$$

であり，線分 $A'B'$，線分 $B'C'$，線分 $C'A'$ の長さはすべて等しく，どの線分の長さも $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\sqrt{\boxed{サ}}$ である。

(b) 点 P と (a) で定めた 3 点 $A', B', C'$ を頂点にもつ四面体 $PA'B'C'$ の体積は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}\sqrt{\boxed{ソ}}$ である。

さらに 4 つの点 $O(0,0,0), D(-2,0,2), E(1,-\sqrt{3},2), F(1,\sqrt{3},2)$ をとる。

(c) 線分 OD，線分 OE，線分 OF のそれぞれと平面 $z=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ との交点を $D', E', F'$ とおくとき，線分 $F'E'$ の中点は線分 PA 上にある。また，このとき線分 $D'E'$，線分 $E'F'$，線分 $F'D'$ の長さはすべて等しく，どの線分の長さも $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\sqrt{\boxed{ト}}$ である。

(d) 線分 PA，線分 PB，線分 OF，線分 OD のそれぞれと平面 $z=1$ との交点を Q, R, S, T とおくと，線分 QR と線分 ST の交点の座標は $\left(\boxed{ナ},\ \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\sqrt{\boxed{ネ}},\ 1\right)$ である。また，四面体 PABC と四面体 ODEF の共通部分からなる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\sqrt{\boxed{ヒ}}$ である。

**右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。**

(3)　$a$ と $t$ はそれぞれ $a > 3$ および $0 \leqq t \leqq 2\pi$ をみたす実数であるとする。座標平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = 2\sin x + 3$$
$$C_2 : y = a - 2\cos(x - t)$$

を考える。

(a)　$a = 2\sqrt{3} + 3$ である場合に，曲線 $C_2$ が曲線 $C_1$ と共有点をもつような $t$ の値の範囲は $\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}\pi \leqq t \leqq \dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}\pi$ である。

(b)　$t = \dfrac{7\pi}{6}$ である場合に $a = \boxed{ミ}$ と定めると，曲線 $C_1$ と曲線 $C_2$ の共有点のうち，その $x$ 座標の値が $\dfrac{3\pi}{2}$ 以上かつ $\dfrac{7\pi}{2}$ 以下の範囲にあるものは一つだけである。この条件によって定まる共有点の $x$ 座標の値 $\theta$ は，$\theta = \dfrac{\boxed{ム}\boxed{メ}}{\boxed{モ}}\pi$ である。さらに曲線 $C_1$ と曲線 $C_2$ によって囲まれる図形のうち，$x$ 座標の値が $2\pi$ 以上かつ $\theta$ 以下の範囲にある部分の面積は $\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}\pi - \boxed{ヨ}$ である。

**右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。**

問題 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の解答は，**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ $e$ を自然対数の底とし，正の定数 $a$ に対して $x$ の関数 $f(x)=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ によって定まる座標平面上の曲線 $C$ : $y=f(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(25 点)

(1) $t$ を正の実数とするとき，曲線 $C$ : $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq t$ の部分の長さ $s$ を $t$ と $a$ によって表せ。

(2) 正の定数 $a$ が与えられたとき，正の実数 $t$ によって (1) で定まる $s$ は $s=g(t)$ のように $t$ の関数として表せる。関数 $g(t)$ の逆関数 $u(s)$ を求めよ。

(3) $u(s)$ を (2) で求めた $g(t)$ の逆関数とする。曲線 $C$ 上の点の $x$ 座標が $u(s)$ であるとき，その点の $y$ 座標 $v(s)$ を求めよ。

(4) (2) および (3) で求めた関数 $u(s), v(s)$ により与えられる関数

$$h(s)=\frac{d}{ds}u(s)\cdot\frac{d^2}{ds^2}v(s)-\frac{d^2}{ds^2}u(s)\cdot\frac{d}{ds}v(s)$$

を求めよ。

(5) (2) と (3) で求めた関数 $u(s), v(s)$ によって表される曲線 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(u(s), v(s))$ における $C$ の接線を $\ell$ とする。$\ell$ 上の点 $\mathrm{Q}(x(s), y(s))$ を $y(s) < v(s)$ であり，かつ $\mathrm{QP}=s$ となるように定める。$y(s)$ を求めよ。

(6) 右側極限についての等式

$$\lim_{s\to+0} h(s)=\lim_{s\to+0}\frac{1}{y(s)^2}$$

が成り立つような定数 $a$ を求めよ。

**右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。**

## 3

座標平面上で 3 つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2$$

$$C_2 : y = 18\sqrt{x} - \frac{63}{2} \quad (x > 0)$$

$$C_3 : y = -18\sqrt{x} - \frac{63}{2} \quad (x > 0)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(25 点)

**(1)** 曲線 $C_1$ 上の点 $(x_1, y_1)$ における $C_1$ の接線の方程式を求めよ。

**(2)** 曲線 $C_2$ 上の点 $(x_2, y_2)$ における $C_2$ の接線の方程式を求めよ。

**(3)** 曲線 $C_1$ の接線でもあり，かつ曲線 $C_2$ の接線でもあるような 2 直線 $\ell_1, \ell_2$ の方程式を求めよ。

**(4)** 曲線 $C_1$ の接線でもあり，かつ曲線 $C_3$ の接線でもあるような直線 $\ell_3$ の方程式を求めよ。

**(5)** **(3)**，**(4)** で求めた 3 直線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

**(6)** **(3)** で求めた 2 直線 $\ell_1, \ell_2$ および曲線 $C_2$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

**右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。**