平成27年度　〔試験時間　100分〕

# F1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ヨ}$ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{カ}$ などは既出の $\boxed{カ}$ を表す。

(40 点)

(1) 実数 $a$ に対し，2 つの 2 次関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8 \\
g(x) &= -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16
\end{aligned}
$$

を考える。

(a) すべての実数 $x$ に対して $g(x) < f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$$a > -\boxed{ア} \quad かつ \quad a \neq \boxed{イ}$$

である。

(b) $g(x)$ の最大値は $-\boxed{ウ}a^4 - \boxed{エ}a^3 - \boxed{オ}a^2$ である。

(c) 次の条件 $(*)$ を満たす実数 $b$ がただ 1 つ存在するとする。

$(*)$ 「すべての実数 $x$ に対して $g(x) \leqq b \leqq f(x)$ が成り立つ。」

このとき，

$$a = -\boxed{カ} \quad または \quad a = \boxed{キ}$$

であり，$a = -\boxed{カ}$ のときは $b = -\boxed{ク}\boxed{ケ}$，$a = \boxed{キ}$ のときは $b = -\boxed{コ}\boxed{サ}$ である。

右のページは白紙です。

(2) 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 8a_n + b_n \\ b_{n+1} &= -25a_n - 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき

$$\boxed{シ}\,a_{n+1} + b_{n+1} = \boxed{ス}\left(\boxed{シ}\,a_n + b_n\right)$$

であるので,

$$b_n = \boxed{セ}^{\,n} - \boxed{ソ}\,a_n$$

である。これにより

$$\frac{a_{n+1}}{\boxed{タ}^{\,n}} = \frac{a_n}{\boxed{タ}^{\,n-1}} + 1$$

となる。したがって

$$a_n = n \cdot \boxed{チ}^{\,n-\boxed{ツ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(3) 平面上に，△ABC とその内部の点 O をとったとき，

$$\mathrm{OA} = 1+\sqrt{3}$$
$$\mathrm{OB} = \sqrt{3}$$
$$\mathrm{OC} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

となっていた。

このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値は $\dfrac{-\boxed{テ}-\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$ であるので

$$\angle\mathrm{AOB} = \boxed{ニヌネ}^\circ$$

である。同様に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\boxed{ノ}-\sqrt{\boxed{ハ}}$ から

$$\angle\mathrm{AOC} = \boxed{ヒフヘ}^\circ$$

である。したがって，

$$\angle\mathrm{BOC} = \boxed{ホマミ}^\circ$$

となる。また，

$$\sin\boxed{ホマミ}^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{ム}}\left(\boxed{メ}+\sqrt{\boxed{モ}}\right)}{4}$$

である。したがって，△ABC の面積は $\boxed{ヤ} + \dfrac{\boxed{ユ}\sqrt{\boxed{ヨ}}}{2}$ である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ $a>0$ を定数とし，座標平面上の点 $\mathrm{P}(p,0)$ から放物線 $C: y=ax^2+2a$ に 2 本の接線 $\mathrm{PQ_1}, \mathrm{PQ_2}$ を引く。ここで $\mathrm{Q_1}, \mathrm{Q_2}$ は接点で，$\mathrm{Q_1}$ の $x$ 座標 $q_1$ は $\mathrm{Q_2}$ の $x$ 座標 $q_2$ より小さいとする。

(1) $q_1$ と $q_2$ を，$p$ を用いて表せ。

(2) 直線 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の方程式を，$a$ と $p$ を用いて表せ。

(3) $S_1$ を直線 $\mathrm{Q_1Q_2}$ と曲線 $C$ で囲まれた部分の面積，$S_2$ を曲線 $C$ と線分 $\mathrm{PQ_1}, \mathrm{PQ_2}$ で囲まれた部分の面積とする。$S_1$ と $S_2$ を，$a$ と $p$ を用いて表し，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(4) $\mathrm{PQ_1} \perp \mathrm{PQ_2}$ となるとき，$a$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 定数 $a$ に対し，

$$f(x) = a\sin 2x - \tan x \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく。

(1) $a > \frac{1}{2}$ であるとする。実数 $\theta$ を，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ かつ $f(\theta) = 0$ を満たすものとするとき，$\cos\theta$ を $a$ を用いて表せ。

(2) 不定積分

$$\int f(x)dx$$

を求めよ。

(3) $\frac{1}{2} < a < 1$ であるとする。このとき，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)|dx + \log a$$

を $a$ の1次式で表せ。ただし，log は自然対数を表す。

(30点)

右のページは白紙です。