

E 1

数

学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ム までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) c を定数として、3 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-c)$$

と定める。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は α, β ($\alpha < \beta$) において

$$f'(\alpha) = 0, \quad f'(\beta) = 0$$

を満たすものとする。

解と係数の関係により、

$$\alpha + \beta = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}(c+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{\text{ウ}}c$$

である。したがって

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = -\frac{\text{エ}}{\text{オカ}}(c^2 - c + \text{キ})$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}(c^2 - c + 1)$$

となるので、 $c = \frac{1}{2}$ のとき

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サシ}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) 定数 θ に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \cos(2^{n-1}\theta) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。

(a) 余弦の 2 倍角の公式により、数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ス}} a_n^2 - 1$$

を満たす。

(b) θ が $\cos \theta = \frac{1}{3}$ を満たすとき

$$a_3 = \frac{\boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}}$$

である。

(c) $\theta = \frac{5}{96}\pi$ とするとき

$$a_{n+1} = a_n$$

を満たす最小の正の整数 n は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 大, 中, 小の3個のさいころを同時に投げるものとする。

(a) 1の目が少なくとも1つ出る確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{テ} & \text{ト} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ナ} & \text{ニ} & \text{ヌ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(b) 出る目の最大値が5である確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ネ} & \text{ノ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ハ} & \text{ヒ} & \text{フ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(c) 大のさいころの目は中のさいころの目以上であり, かつ, 小のさいころの目は中のさいころの目以下である確率は $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ヘ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ホ} & \text{マ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(d) 大と小のさいころの目の平均が中のさいころの目と等しい確率は $\frac{1}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ミ} & \text{ム} \\ \hline \end{array}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 p を正の定数として、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -5x^p \log x \quad (x > 0)$$

と定める。 a は $f'(a) = 0$ を満たす正の実数とする。ここで、 $\log x$ は自然対数であり、 e は自然対数の底を表す。また、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

- (1) a の値を p を用いて表せ。
- (2) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求め p を用いて表せ。
- (3) 直線 $x = a$ と x 軸、および曲線 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq 1$ の部分で囲まれる部分の面積を S とする。このとき、

$$\lim_{p \rightarrow +0} S$$

の値を求めよ。必要ならば、 $\lim_{u \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{u} = 0$ であることを用いてよい。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 正の定数 a ($a \neq 1$) に対して、2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax(1-x)$$

と定める。曲線 $C: y = f(x)$ の点 $(1, 0)$ における接線を ℓ_1 、直線 $y = -x$ を ℓ_2 とする。曲線 C の $x \leq 1$ の部分と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれる部分の面積を S で表し、また、この部分を x 軸の周りに 1 回転してできる図形の体積を V で表す。

- (1) 直線 ℓ_1, ℓ_2 の交点の座標を a を用いて表せ。
- (2) S を a を用いて表せ。
- (3) 定数 a は $a > 1$ を満たすものとする。2 直線 ℓ_1, ℓ_2 と x 軸で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる図形の体積を U で表すとき、

$$\frac{30a^3}{(a-1)^4\pi}(V-U)$$

を a の 1 次式で表せ。

- (4) $\lim_{a \rightarrow 1+0} (a-1)^2 V$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。