平成26年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100分〕

A 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

以下の問題 $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ において，$\boxed{}$ 内の**カタカナ**の 1 文字にあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数で表しなさい。なお，$\boxed{\text{ア}}$ のようなカタカナ 1 文字は 1 桁の数を表し，$\boxed{\text{アイ}}$ のようなカタカナ 2 文字は 2 桁の数を表すものとします。

$\boxed{\mathbf{1}}$ (15 点)

A, B は共に実数を成分とする 2 次の正方行列で，条件

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

を満たすものとする。

(1) $B^{-1}A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & -\boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & -\boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$ である。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & -\boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$ である。

(3) 条件を満たす A は以下の 4 つである。

$$A = \pm \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケ}} & -\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \\ \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \\ \boxed{\text{タ}} & -\boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$

右のページは白紙です。

$\boxed{2}$ (15 点)

平面上に同一直線上にない 3 点 A, B, C が与えられているとし，△ABC の内部の点 P が

$$4\overrightarrow{AP}+7\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

を満たしているとする。線分 AP を延長した直線と線分 BC との交点を Q，線分 BP を延長した直線と線分 AC との交点を R とおく。

(1)

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}\overrightarrow{AC}$$

である。

(2) 点 P は線分 AQ を $\boxed{キ}:\boxed{ク}$ に内分する点であり，点 Q は線分 BC を $\boxed{ケ}:\boxed{コ}$ に内分する点である。

(3) △APB の面積を S，四角形 CQPR の面積を T とおくと，

$$S:T=\boxed{サ}:\boxed{シス}$$

である。

右のページは白紙です。

3 (15 点)

a を正の実数として,

$$f(x) = \frac{ax+1}{x^2+2}$$

とおく。$f(x)$ は $x = \frac{4}{3}$ で極値をとるとする。

(1) a の値は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) $f(x)$ の最小値は $-\boxed{\text{ウ}}$ であり, そのときの x の値は $-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3) k を実数として, 座標平面上で曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ を考える。その共有点がただ1つになるのは, $k = -\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

右のページは白紙です。

$\boxed{4}$ (15 点)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x}\cos(2\pi x)\,dx, \quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x}\sin(2\pi x)\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) a_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより，

$$a_n = -\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\,b_n$$

がわかる。

一方，b_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより，

$$b_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\,a_n - \frac{e^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}\,e^{\boxed{\text{カ}}n+\boxed{\text{キ}}}}$$

がわかる。

これらの関係式より，a_n は

$$a_n = \frac{\pi\left(e^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}}\right)}{\boxed{\text{コ}}\left(\pi^{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}}\right)e^{\boxed{\text{ス}}n+\boxed{\text{セ}}}}$$

となることがわかる。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}\left(\pi^{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}}\right)\left(e^{\boxed{\text{ツ}}} - e\right)}$ となる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{5}$ の解答は**解答用紙**に記入しなさい。

$\boxed{5}$ (40点)

座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上に2点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(3, 9)$ をとり，t を実数として，点 $\mathrm{P}(t, t^2)$ をとる。$f(t) = \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ とおく。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表している。さらに，$t \neq -1, 3$ のとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ のなす角を θ とおく。ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $t = 0$ のときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $f(t)$ は t の4次式となる。それを降べきの順に整理して書け。

(3) $f(t)$ は

$$f(t) = (t+m)(t+n)(t^2+at+b) \qquad \left(\text{ただし，} m, n, a, b \text{ は } \underline{\text{整数}}\right)$$

の形に書ける。$f(t)$ をこの形に書き表せ。

(4) $-1 < t < 3$ の範囲内で，$\theta = 90^\circ$ となるときの t の値を求めよ。

(5) 左側からの極限 $\displaystyle\lim_{t \to 3-0} \cos\theta$ の値を求めよ。