平成26年度　　〔試験時間　60分〕

P 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより4ページまであります。

〔注　　意〕

⑴ 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

⑵ 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

⑶ 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

⑷ 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

⑸ 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

⑹ 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の各文章中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, ・・・ に当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表しなさい。根号の中は，4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお，$\boxed{ア}$ は既出の $\boxed{ア}$ を表します。

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a, a^2), \mathrm{B}(b, b^2)$ $(0 \leqq a < b)$ に対して，$L(a, b)$ を線分 AB の長さとし，$S(a, b)$ を線分 AB と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積とする。さらに，$T(a, b)$ を $a \leqq x \leqq b$ の範囲で放物線 $y = x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積とする。

(1) **(a)** $L(0, t) = \dfrac{1}{2}L(0, 1)$ となるのは，$t^2 = \dfrac{1}{\boxed{ア}}(\sqrt{\boxed{イ}} - \boxed{ウ})$ となるときである。

(b) $L(0, t) = L(t, 1)$ となるのは，$t = \dfrac{1}{\boxed{エ}}(\sqrt{\boxed{オ}} - \boxed{カ})$ のときである。

(2) **(a)** $S(0, t) = \dfrac{1}{2}S(0, 2)$ となるのは，$\log_2 t = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ となるときである。

(b) $T(t, 2) = S(0, 2)$ となるのは，$\log_2 t = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ となるときである。

(25 点)

右のページは白紙です。

2 k を定数として，3次方程式

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - k = 0 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える。

(1) この方程式が，異なる3つの実数解をもつような k の値の範囲は

$$-\boxed{アイ} < k < \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \quad \cdots\cdots \quad (**)$$

である。

(2) k が $(**)$ の範囲にあるとき，方程式 $(*)$ の3つの解を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$) とおく。

(a) k が $(**)$ の範囲を動くとき，α, β, γ の取りうる値の範囲は，それぞれ

$$-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} < \alpha < -\boxed{キ}, \quad -\boxed{ク} < \beta < \boxed{ケ}, \quad \boxed{コ} < \gamma < \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である。

(b) k が $(**)$ の範囲を動くとき，α と γ の積 $\alpha\gamma$ が最小となるのは

$$k = -\frac{\boxed{スセソ}}{\boxed{タチ}}$$

のときであって，$\alpha\gamma$ の最小値は $-\dfrac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナニ}}$ である。

(25点)

右のページは白紙です。

3 Oを原点とする xyz 空間の x 軸上，y 軸上，z 軸上にそれぞれ点 A, B, C があり，$\mathrm{AB}=3, \mathrm{AC}=2$ であるという。そのとき，$\mathrm{BC}=a$ とおき，三角形ABCの面積を S とおく。

(1) a の取りうる値の範囲は

$$\sqrt{\boxed{ア}} \leqq a \leqq \sqrt{\boxed{イウ}}$$

である。

(2) **(a)** $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{1}{\boxed{エオ}}(-a^2+\boxed{カキ})$ である。

(b) $S^2 = \dfrac{1}{\boxed{クケ}}(-a^4+\boxed{コサ}a^2-\boxed{シス})$ である。

(3) $\mathrm{OA}=x$ とおいて，S^2 を x を用いて表すと

$$S^2 = -\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}x^4+\boxed{タ}$$

となる。

(4) $S=2\sqrt{2}$ のとき，四面体OABCに内接する球（すなわち，中心がこの四面体の内部にあって，すべての面と1点のみを共有する球）の半径を r とおく。

(a) $r = \dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{1+\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}+\sqrt{\boxed{トナ}}}$ である。

(b) $r = \boxed{ニ}\sqrt{\boxed{チ}}-\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{テ}}+\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{トナ}}-\boxed{ノ}$ となる。

(25点)

右のページは白紙です。

4 r は 2 以上 9 以下の自然数とする。n を r 以上の自然数として，次の条件を満たす n 桁の自然数を考える。

(i) 各位の数は 1 から r までの数 $1, 2, \cdots, r$ のどれかである。

(ii) $1, 2, \cdots, r$ のどの一つも必ずどこかの位に現れる。

このような自然数全体の集合を考え，この集合の要素の個数を ${}_r\mathrm{S}_n$ とおく。また，この集合のすべての要素の和を $f_r(n)$ とおく。

(1) $r = 2$ とする。

(a) ${}_2\mathrm{S}_2 = \boxed{ア}$，${}_2\mathrm{S}_3 = \boxed{イ}$ である。

一般に，${}_2\mathrm{S}_n = \boxed{ウ}^n - \boxed{エ}$ である。

(b) $f_2(2) = \boxed{オカ}$，$f_2(3) = \boxed{キクケ}$ である。

一般に，$f_2(n) = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\left(\boxed{シス}^n - 1\right) \cdot {}_2\mathrm{S}_n$ が成り立つ。

(2) $r = 3$ とする。

(a) ${}_3\mathrm{S}_n = \boxed{セ}^n - \boxed{ソ} \cdot \boxed{ウ}^n + \boxed{タ}$ である。

(b) $f_3(n) = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\left(\boxed{シス}^n - 1\right) \cdot {}_3\mathrm{S}_n$ が成り立つ。

(3) $r = 4$ とする。

(a) ${}_4\mathrm{S}_n = \boxed{テ}^n - \boxed{ト} \cdot \boxed{セ}^n + \boxed{ナ} \cdot \boxed{ウ}^n - \boxed{ニ}$ である。

(b) $f_4(n) = \dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネノ}}\left(\boxed{シス}^n - 1\right) \cdot {}_4\mathrm{S}_n$ が成り立つ。

(25 点)

右のページは白紙です。