平成25年度　　〔試験時間　100分〕

E 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ロ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数として表しなさい。なお，$\boxed{オ\ カ}$ などは既出の $\boxed{オ\ カ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) 1 つの袋に，$\boxed{S}$，$\boxed{T}$，$\boxed{U}$ の 3 種類のカードがそれぞれ s 枚，t 枚，u 枚ずつ入っている。ただし s，t，u は 3 以上の整数である。この袋からカードを 1 枚ずつ 3 枚取り出して，取り出した順に並べる。ただし，取り出したカードはもとに戻さない。次のことが成り立っているとする。

(i) 1 枚目のカードが $\boxed{T}$ となる確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

(ii) 1 枚目のカードが $\boxed{T}$ で，かつ，2 枚目のカードが $\boxed{T}$ となる確率は $\dfrac{1}{39}$ である。

(iii) 並べたカードが 1 枚目から順に $\boxed{T}\boxed{U}\boxed{S}$ となる確率は $\dfrac{1}{40}$ である。

(iv) 並べたカードが $\boxed{S}\boxed{S}\boxed{S}$ となる確率は $\dfrac{1}{8}$ より大きい。

このとき，(i)，(ii) より

$$t = \boxed{ア\ イ},\quad s + u = \boxed{ウ\ エ}$$

であることがわかる。さらに (iii) より

$$(s, u) = (\boxed{オ\ カ}, \boxed{キ\ ク}) \quad \text{または} \quad (s, u) = (\boxed{ケ\ コ}, \boxed{サ\ シ})$$

であることがわかる。ただし $\boxed{オ\ カ} < \boxed{ケ\ コ}$ とする。さらに (iv) より

$$(s, u) = (\boxed{ス\ セ}, \boxed{ソ\ タ})$$

であることがわかる。

右のページは白紙です。

(2)　n を 1 以上の整数，e を自然対数の底とする。関数

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{6}\right)^n e^{n-x} \quad (x \geqq 0)$$

を考えると，$f_n(x)$ の $x \geqq 0$ での最小値は $\boxed{チ}$ である。また，$f_n(x)$ の $x \geqq 0$ での最大値は，$n = 1$ のとき $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$，$n = 2$ のとき $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$，$n = 3$ のとき $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ となる。次に関数

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{6} e^{1-\frac{x}{n}}\right) \quad (x \geqq 0)$$

$$h_n(x) = \frac{x}{6} e^{1-\frac{x}{n}} \quad (x \geqq 0)$$

を考える。$h_n(x)$ の $x \geqq 0$ での最小値は $\boxed{ネ}$ であり，最大値は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}} n$ である。

したがって，$g_n(x)$ の $x \geqq 0$ での最小値が -1 かつ最大値が 1 となるような最小の n は $\boxed{ヒ\ フ}$ である。

右のページは白紙です。

(3)　座標平面上の 2 点 P(3, 0), Q$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < \pi)$ について，

d を原点 (0, 0) と直線 PQ の距離とすると，

$$d^2 = \frac{\boxed{\text{ヘ}}\boxed{\text{ホ}}\sin^2\theta}{\boxed{\text{マ}}\boxed{\text{ミ}} - \boxed{\text{ム}}\boxed{\text{メ}}\cos\theta}$$

である。d^2 は $\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ユ}}$ をとり，このとき直線 PQ の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}\sqrt{\boxed{\text{リ}}}\,x + \frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}\sqrt{\boxed{\text{ロ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 実数 a, b に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

と定め，座標平面において曲線 $C : y = f(x)$ と，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を考える。ただし，$t \neq 0$ とする。直線 ℓ は点 P を通り，P と異なる点 Q で曲線 C と接しているとする。さらに，直線 ℓ' は点 Q を通り，Q と異なる点 R で曲線 C と接しているとする。

(1) 点 Q の x 座標 q を，t を用いて表せ。また，直線 ℓ の傾き m と y 切片 k を，t, a, b を用いて表せ。

(2) $t > 0$ の場合に，$x \geqq 0$ において，曲線 C，直線 ℓ，y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とおき，$x \leqq 0$ において，曲線 C，直線 ℓ，y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とおく。S_1, S_2 を，それぞれ t を用いて表せ。

(3) 直線 ℓ' の方程式が $y = 0$ のとき，a, b を，それぞれ t を用いて表せ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 座標平面において，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により，点 $(1, 2)$ が点 $(3, 5)$ に移され，点 $(1, 1)$ が直線 $y = x$ 上に移されるとする。さらに $ad - bc = 4$ とする。

(1) A を求めよ。

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(2) $y_n - x_n$ を n を用いて表せ。

(3) $\dfrac{x_n}{2^n}$ を n を用いて表せ。

(4) x_n と y_n を n を用いて表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。