平成 25 年度　〔試験時間　100 分〕

D 1　数　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横 1 行について 1 箇所に限ります。 2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。

ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ン}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表し，比はもっとも簡単な整数の比で表しなさい。なお，$\boxed{サ}$ などは既出の $\boxed{サ}$ を表す。

(40 点)

(1) 媒介変数 t を用いて表される座標平面上の 2 つの曲線を考える。ただし，(b) で log は自然対数である。

(a) 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{6}{t} \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{6}{t}\right) \end{cases} \qquad (t \neq 0)$$

と表される曲線について，t を消去して得られる x と y の関係式は

$$\frac{y^2}{\boxed{ア}} - \frac{x^2}{\boxed{イウ}} = 1$$

である。

(b) 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{6}{t} - 6 \\ y = \log\left(t + \dfrac{6}{t}\right) - 1 \end{cases} \qquad (t > 0)$$

と表される別の曲線を考える。t を消去して得られる x と y の関係式は

$$y = \frac{1}{\boxed{エ}} \log\left(\boxed{オ}\,x^2 + \boxed{カキ}\,x + \boxed{クケ}\right) - 1$$

である。この曲線上の点で，接線の傾きが $\dfrac{1}{10}$ となる点の x 座標は $\boxed{コ}$ または $-\boxed{サ}$ である。$x = -\boxed{サ}$ となる正の数 t は

$$t = \boxed{シ} + \sqrt{\boxed{スセ}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) θ を $0 \leqq \theta < \pi$ を満たす実数として，x についての 2 次方程式

$$x^2 - 2(\sin\theta + \cos\theta)x + \frac{13}{8}\cos^2 2\theta = 0 \qquad (*)$$

を考える。

(a) $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ のとき，方程式 $(*)$ の解は

$$x = \frac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}} \pm \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\sqrt{2}$$

である。

(b) 方程式 $(*)$ が 2 つの異なる実数解をもつための必要十分条件は

$$13\sin^2 2\theta + 8\sin 2\theta - \boxed{テ} > 0$$

が成り立つことであり，したがって

$$\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ\ ニ}} < \sin 2\theta \leqq 1 \qquad (**)$$

が成り立つことである。θ が $0 \leqq \theta < \pi$ と $(**)$ を満たすとき，$\cos\theta$ の値の範囲は

$$\frac{1}{\boxed{ヌ\ ネ}}\sqrt{\boxed{ノ\ ハ}} < \cos\theta < \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ\ ヘ}}\sqrt{\boxed{ホ\ マ}}$$

である。

右のページは白紙です。

(3) 平面上に $\triangle ABC$ と点 O があり，

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たすとする。直線 AO と辺 BC の交点を P，直線 CO と辺 AB の交点を Q とする。また，点 O を通り直線 AB に平行な直線が辺 AC，辺 BC と交わる点を，それぞれ M，N とする。このとき，

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{メ}}{\boxed{モ}}\overrightarrow{AC}$$

であり，

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \boxed{ヤ} : \boxed{ユ},\quad \mathrm{AO} : \mathrm{OP} = \boxed{ヨ} : \boxed{ラ}$$

である。また $\mathrm{CO} : \mathrm{OQ} = \boxed{リ} : \boxed{ル}$ であり

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\boxed{レ}}{\boxed{ロ}}\overrightarrow{AB}$$

である。ゆえに $\mathrm{BN} : \mathrm{NP} : \mathrm{PC} = \boxed{ワ} : \boxed{ヲ} : \boxed{ン}$ となる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = e^{-x}$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ を考える。ここで，e は自然対数の底である。C 上の点 $(a, f(a))$ $(a > 0)$ における接線を ℓ とする。原点を O，ℓ と x 軸の交点を P，ℓ と y 軸の交点を Q とし，三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とする。また，曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を $T(a)$ とする。

(1) 2 点 P，Q の座標をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) a が $a > 0$ の範囲で動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

(3) $e^a(1 - T(a))$ を求めよ。

(4) a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を次のように定める。$a_1 = a$ とし，$n \geqq 2$ のとき，点 $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ における C の接線と x 軸との交点の x 座標を a_n とする。$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 1回行うごとに，勝ち負けが必ず定まるゲームがある。1回のゲームで勝つ確率と負ける確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるとする。このゲームを繰り返し行う。$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，n 回目のゲームの得点 q_n を以下のように定める。まず，1回目のゲームで勝ったときは $q_1 = 1$，負けたときは $q_1 = -1$ とする。$n \geqq 2$ に対しては次のように定める。$(n-1)$ 回目のゲームで勝っていた場合，n 回目のゲームで勝てば $q_n = 1$，負ければ $q_n = -1$ とする。$(n-1)$ 回目のゲームで負けていた場合，n 回目のゲームで勝てば $q_n = -2q_{n-1}$，負ければ $q_n = 2q_{n-1}$ とする。

例えば，1回目のゲームに勝ち，2回目から4回目までのゲームにすべて負け，5回目から7回目までのゲームにすべて勝ったとすると，

$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = (1, -1, -2, -4, 8, 1, 1)$$

となる。

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_k$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) ゲームを3回行うとする。$S_3 \geqq 0$ となる確率を求めよ。

(2) n 回目のゲームに勝ち，$(n+1)$ 回目から $(n+m)$ 回目までのゲームにすべて負け，$(n+m+1)$ 回目のゲームに勝ったとする。このとき，

$$T = q_{n+1} + q_{n+2} + \cdots + q_{n+m} + q_{n+m+1}$$

を求めよ。ただし，n，m は1以上の整数とする。

(3) ゲームを7回行うとする。7回目のゲームに勝ち，かつ $S_7 = 3$ となる確率を求めよ。

(4) ゲームを7回行うとする。$S_7 \geqq 0$ となる確率を求めよ。

(30点)

右のページは白紙です。