平成 25 年度　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　60 分〕

B 1　　数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより４ページまであります。

〔注　　意〕

⑴ 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

⑵ 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

⑶ 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

⑷ 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。２箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

⑸ 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

⑹ 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の各問中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, ・・・にあてはまる0から9までの数字を求め，その数を**解答用マークシート**の指定された欄にマークせよ。ただし，$\boxed{}$ は1桁の数，$\boxed{\,\vdots\,}$ は2桁の数を表す。分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

$\boxed{1}$ 実数 a, b, c に対して，放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ は点 $\mathrm{A}(-2, 1)$ を通るとする。実数 p, q に対して，放物線 $C_2 : y = \dfrac{9}{4}x^2 + px + q$ は点 $\mathrm{B}(2, -7)$ を通るとする。

(1) 2つの放物線 C_1, C_2 が一致するのは，

$$a = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ b = p = -\boxed{ウ},\ c = q = -\boxed{エ\,\vdots\,オ}$$

の場合である。

(2) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が放物線 C_1 上を動くとき

$$\begin{cases} X = 2 - x \\ Y = 1 - y \end{cases}$$

によって定まる点 $\mathrm{Q}(X, Y)$ の軌跡が放物線 C_2 であるのは，

$$a = -\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}},\ b = -\boxed{ク},\ c = \boxed{ケ},\ p = -\boxed{コ\,\vdots\,サ},\ q = \boxed{シ}$$

の場合である。

(3) **(2)** の放物線 C_1, C_2 によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ス\,\vdots\,セ}}{\boxed{ソ}}\sqrt{\boxed{タ\,\vdots\,チ}}$ である。

(15点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

$\boxed{2}$ 大小 2 つのさいころを投げる。大きいさいころの出た目を初項とし，小さいさいころの出た目を公比とする等比数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ が得られる。

(1) 第 6 項 a_6 が 6 で割り切れる整数である確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ\,ウ}}$ である。

(2) 第 72 項 a_{72} が 192 で割り切れる整数である確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ\,カ}}$ である。

(3) 第 360 項 a_{360} が 3240 で割り切れる整数である確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク\,ケ}}$ である。

(4) 第 360 項の平方根 $\sqrt{a_{360}}$ が整数である確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(25 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

$\boxed{3}$ 等式 $f_1(\cos\theta) = \cos 2\theta$ がすべての実数 θ について成り立つような多項式 $f_1(x)$ と，等式 $f_2(\cos\theta) = \cos 3\theta$ がすべての実数 θ について成り立つような多項式 $f_2(x)$，および等式 $f_3(\cos\theta) = \cos 6\theta$ がすべての実数 θ について成り立つような多項式 $f_3(x)$ について考える。

(1) $f_1(x) = \boxed{ア}x^2 - \boxed{イ}$ であり，$f_2(x) = \boxed{ウ}x^3 - \boxed{エ}x$ である。また，$f_3(x) = 32x^6 - \boxed{オカ}x^4 + \boxed{キク}x^2 - \boxed{ケ}$ である。

(2) これらの 3 つの関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ に対し，実数 x が条件 C をみたすとは，これらの関数のうち少なくとも 2 つの関数の値が x において等しくなることであるとする。$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x のうち条件 C をみたすものは全部で $\boxed{コサ}$ 個あり，それらの実数のうち 3 番目に大きいものは $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\sqrt{\boxed{セ}}$ である。

(3) 3 つの関数にさらに $f_4(\cos\theta) = \cos 4\theta$ がすべての実数 θ について成り立つような関数 $f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ を 1 つ加える。つまり，4 つの関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$ を考える。この場合，組み分けを行うとは，4 つの関数を 2 つの組に分け，それぞれの組が 2 つの関数からなるようにすることとする。さらにここで実数 x が条件 D をみたすとは，ある組み分けを行うことにより，1 つの組に属する 2 つの関数の x における値が等しく，かつ他の組に属する 2 つの関数の x における値も等しくなることであるとする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲にある実数 x のうち条件 D をみたすものは全部で $\boxed{ソ}$ 個あり，それらの実数のうち最も小さいものは $-\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}} - \dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\sqrt{\boxed{ト}}$ である。

(30 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

4 p, q がともに実数であるとき，x についての 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ が 3 つの異なる実数解をもつための必要十分条件は，

$$p < \boxed{\text{ア}} \quad \text{かつ} \quad |q| < \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,|p|^{\frac{3}{2}}$$

によって与えられる。一方，a が実数であるとき，x の多項式 x^3+ax^2 は，$X = x + \dfrac{a}{3}$ とおくことにより，X の多項式として表すことができる。具体的には x の多項式と X の多項式についての等式

$$x^3+ax^2 = X^3 - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2X + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}}a^3$$

が成立する。3 つの実数 a, b, c により定まる 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解の個数は，左辺を X の多項式として表すことによって得られる X についての 3 次方程式の解の個数と一致するため，これまでの考察から，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が 3 つの異なる実数解をもつための必要十分条件は

$$b < \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}a^2 \quad \text{かつ} \quad \left|\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}}}a^3 - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}ab + c\right| < \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}\left|b - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}a^2\right|^{\frac{3}{2}}$$

で与えられることがわかる。

(30 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。