平成25年度　〔試験時間　60分〕

A 1　数　学

この冊子は，数学の問題で1ページより4ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。

ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の各文章中の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$, $\cdots$ に当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。 根号の中は，4 でも 9 でも割り切れないものとします。

$\boxed{1}$

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

条件: ある定数 k があって，点 (n, a_n) $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ はすべて直線 $y = -5x + k$ の上にある。

このとき，$\{a_n\}$ は公差 $-\boxed{ア}$ の等差数列である。$\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ の値が n によらず一定となるのは $k = \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ のときであり，その値は $-\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ を考える。

条件: ある定数 ℓ があって，点 $(n, \log_2 b_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ はすべて直線 $y = -5x + \ell$ の上にある。

このとき，$\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$ の等比数列である。$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \leqq 1$ がすべての n に対して成り立つためには，$\ell \leqq \log_2 \boxed{ケコ}$ であることが必要十分である。

(25 点)

右のページは白紙です。

$\boxed{2}$ nを自然数とする。$0 \leqq r \leqq n$を満たす整数rに対して，$f_n(r) = \dfrac{4^r 2^{n-r}}{r!\,(n-r)!}$，$g_n(r) = \dfrac{5^r}{r!\,(n-r)!}$とおく。ただし，$0! = 1$であるとする。

(1) $r \leqq n-1$のとき，$f_n(r) < f_n(r+1)$が成り立つためには，

$$r < \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\boxed{ウ}\,n-1)$$

であることが必要十分である。また，$g_n(r) < g_n(r+1)$が成り立つためには，

$$r < \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}(\boxed{カ}\,n-1)$$

であることが必要十分である。

(2) $n = 10$とする。

(a) $f_{10}(r)$が最大になるのは$r = \boxed{キ}$のときである。また，$g_{10}(r)$が最大になるのは$r = \boxed{ク}$のときである。

(b)

$$\sum_{r=0}^{10} f_{10}(r) = \frac{2^{\boxed{ケ}}3^{\boxed{コ}}}{5^{\boxed{サ}}7}$$

である。また，

$$\sum_{r=0}^{10} g_{10}(r) = \frac{2^{\boxed{シ}}3^{\boxed{ス}}}{5^{\boxed{セ}}7}$$

である。

(25点)

右のページは白紙です。

3

座標空間において，3 点 A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$, C$(0,0,1)$ をとり，線分 AC を $p:1-p$ に内分する点を P とする。ただし，$0<p<1$ とする。

(1) 線分 BC 上に点 Q が，線分 AQ と線分 BP が直交するようにとれるためには，

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq p < \boxed{ウ}$ であることが必要十分である。そのような Q がとれるとき，

$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}} = q$ とおく。そのとき，$(p+1)(q+1) = \boxed{エ}$ が成り立ち，

$$\mathrm{PQ}^2 = \boxed{オ}(p^2+q^2) - \boxed{カ}$$

となる。さらに，PQ が最小となるのは，$p = \sqrt{\boxed{キ}} - \boxed{ク}$ のときで，このとき

$$\mathrm{PQ}^2 = \boxed{ケコ} - \boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}$$

である。

(2) 点 D$(1,1,1)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を E とし，線分 CD を $1:2$ に内分する点を F とする。点 P に対して，線分 BD 上の点 R を，線分 EF と線分 PR が交わるようにとる。このとき

$$\mathrm{PR}^2 = \boxed{ス}p^2 - \boxed{セ}p + \boxed{ソ}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4 kは正の定数として$f(x)=-x^2+kx$とおき，xy平面における放物線$C:y=f(x)$の上の点Pに対し，次の条件$(*)$を考える。

$(*)$： PにおけるCの法線（すなわち，Pを通り，PにおけるCの接線と垂直な直線）は，原点Oを通る。

(1) 条件$(*)$を満たすPが，C上に3つあるようなkの値の範囲は

$$k > \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}} \quad \cdots\cdots \quad (**)$$

である。

kが$(**)$の範囲にあるとき，条件$(*)$を満たす3つの点のうちOと異なる点をP_1, P_2とし，それらのx座標を$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$とする。さらに領域$\alpha \leqq x \leqq \beta$において，放物線$C$と$x$軸，および2直線$x=\alpha, x=\beta$で囲まれた図形の面積を$S$とし，直線$P_1P_2$と$x$軸，および2直線$x=\alpha, x=\beta$で囲まれた図形の面積を$T$とする。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}k$，$\alpha\beta=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(k^2+\boxed{\text{キ}})$である。

(3) $\angle P_1OP_2$が45°になるのは，$k=\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$のときである。

そのとき，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$である。

(25点)

右のページは白紙です。