平成24年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100分〕

Ｐ　１　　　数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより５ページまであります。

〔注　　意〕

(1)　試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2)　監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3)　解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4)　解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆（ＨＢまたはＢ）を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは横１行について１箇所に限ります。２箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5)　試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6)　問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ヒ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。 なお，$\boxed{テ}$ などは既出の $\boxed{テ}$ を表す。

(40 点，ただし数学科は 60 点)

(1) a を実数とするとき，方程式

$$|x|-|x^2-4|+|x+6|=a$$

を考える。この方程式の実数解が 2 個であるための条件は

$$a<\boxed{ア},\qquad \boxed{イ}<a<\boxed{ウエ}$$

であり，実数解を持たないための条件は

$$a>\boxed{オカ}$$

である。また，次の不等式

$$|x|-|x^2-4|+|x+6|>2$$

には，正の整数解が $\boxed{キ}$ 個，負の整数解が $\boxed{ク}$ 個ある。

右のページは白紙です。

(2) 空間内に点 O, A, B, C があり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，それぞれの大きさと内積が

$$|\vec{a}|=9,\qquad |\vec{b}|=12,\qquad |\vec{c}|=\sqrt{42},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=72,\qquad \vec{a}\cdot\vec{c}=57,\qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=48$$

であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $\dfrac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ 2 であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が 3 点 A, B, C を通る平面と直交するのは $s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$, $t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときである。したがって，四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{チツ}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 三角関数についての等式

$$\boxed{\text{テ}}\cos^3\theta - \boxed{\text{ト}}\cos\theta - \cos 3\theta = 0$$

を利用して，t に関する 3 次方程式

$$\boxed{\text{テ}}\,t^3 - \boxed{\text{ト}}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

を解いたとき，$\cos\dfrac{3}{4}\pi$ が解の 1 つであることがわかる。したがって，この方程式の残りの 2 つの解は

$$\cos\frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と

$$\cos\frac{\boxed{\text{ノ}}}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる。これより，

$$\tan\frac{\boxed{\text{ナ}}}{12}\pi = \boxed{\text{ハ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ a を正の定数とし，座標平面において 放物線 $C : y = ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\, at^2)$ を考える。ただし，$t > 0$ とする。点 P における C の接線 ℓ と x 軸の交点を R とする。x 軸上の点 Q を，$\mathrm{RP} = \mathrm{RQ}$ を満たし，その x 座標が R の x 座標より大きいものとする。

(1) 点 P を通り ℓ と直交する直線の方程式を求めよ。

(2) 点 Q の座標を求めよ。

(3) 直線 ℓ と点 P において接し x 軸とも接する円で，中心が第 1 象限にあるものを考える。この円の中心の座標を (q, r) とするとき，q, r を t と a を用いて表せ。

(4) (3) の q, r に対して，t が 0 に限りなく近づくときの，$\dfrac{q}{t}$，$\dfrac{r}{t^2}$，$\dfrac{r}{q^2}$ の極限値をそれぞれ求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$x > 0$ で定義された関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \qquad (x > 0)$$

で定める。ただし，log は自然対数を表す。

$t > 1$ とするとき，座標平面において曲線 $y = f_n(x)$ の $x \leqq t$ の部分，x 軸，直線 $x = t$ の 3 つで囲まれている図形の面積を $S_n(t)$ とする。また，4 点 $(1, 0)$，$(t, 0)$，$(t, f_n(t))$，$(1, f_n(t))$ を頂点とする長方形の面積を $T_n(t)$ とする。

(1) 関数 $f_n(x)$ が極大となるときの x の値と，そのときの $f_n(x)$ の極大値を求めよ。

(2) t が $t > 1$ を動くとき，$T_n(t) - S_n(t)$ が最大となる t の値を求めよ。

(3) $S_1(t)$ と $S_n(t)$ $(n \geqq 2)$ を求めよ。

(4) 各 $n \geqq 2$ に対して $T_n(t) = S_n(t)$ となる t $(t > 1)$ がただ 1 つあることを示せ。ただし，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ となることを用いてもよい。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。