平成23年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　〔試験時間　100分〕

G 1　　数　　学

この冊子は，数学の問題で1ページより5ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

以下の問題 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ において，$\boxed{}$ 内の**カタカナ**の1文字にあてはまる0から9までの数字を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。ただし，分数は既約分数で表しなさい。なお，$\boxed{\text{ア}}$ のようなカタカナ1文字は1桁(けた)の数を表し，$\boxed{\text{アイ}}$ のようなカタカナ2文字は2桁の数を表すものとします。

$\boxed{1}$ (17点)

2次関数 $f(x) = 9x^2 - 6x + 7$ を考える。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，頂点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \boxed{\text{オ}}\right)$ である。

(2) 放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に -8 だけ平行移動して得られる曲線は

$$y = \boxed{\text{カ}}x^2 - \boxed{\text{キク}}x + \boxed{\text{ケコ}}$$

という式で表される。

(3) 2次方程式 $f(x) = 0$ は虚数解

$$\frac{\boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,i}{\boxed{\text{ス}}}$$

をもつ (ただし, i は虚数単位を表す)。これらの虚数解を α, β $(\alpha \neq \beta)$ とおくとき, $\alpha + 2, \beta + 2$ を解にもつ2次方程式は

$$\boxed{\text{セ}}x^2 - \boxed{\text{ソタ}}x + \boxed{\text{チツ}} = 0$$

と書くことができる。

右のページは白紙です。

$\boxed{\textbf{2}}$ (16点)

座標平面上のベクトル $\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(1,5)$ を考える。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさはそれぞれ

$$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{アイ}},\quad |\vec{b}|=\sqrt{\boxed{ウエ}}$$

であり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと,

$$\cos\theta=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\sqrt{\boxed{クケ}}$$

である。

(2) $\vec{c}$ は $\vec{c}=\vec{b}+k\vec{a}$ (k は実数) で表されるベクトルで, $\vec{a}$ に垂直であるものとする。このとき,

$$k=-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

であり, $\vec{c}$ を成分表示すると

$$\vec{c}=\left(-\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}},\ \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}\right)$$

となる。

(3) $\vec{c}$ を (2) で求めたベクトルとする。ベクトル $\vec{d}=(4,-\frac{1}{3})$ を $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{c}$ (m, n は実数) の形で表すと,

$$\vec{d}=\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{a}-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}\vec{c}$$

となる。

右のページは白紙です。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (17点)

x を実数として

$$y = 3\sin 2x + 2\cos 2x$$

とおく。

(1) $x = \dfrac{\pi}{12}$ のとき, $y = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$,

$x = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき, $y = \boxed{\text{エ}} - \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

である。

(2) x が $\tan x = \sqrt{6}$ を満たすとき,

$$\cos^2 x = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\ ,\quad \sin x\cos x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となるから,

$$y = \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

(3) x が実数全体を動くとき, y のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{\boxed{\text{チツ}}} \leqq y \leqq \sqrt{\boxed{\text{テト}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{4}$ および $\boxed{5}$ の解答はそれぞれの**解答用紙**に記入しなさい。

$\boxed{4}$ (25 点)

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{4}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x + \frac{2}{5}$$

と定め, 座標平面上の曲線 $C_1 : y = f(x)$, 曲線 $C_2 : y = g(x)$ を考える。

(1) 2 つの曲線 C_1, C_2 は第 1 象限において, 2 つの共有点をもつ。その 1 つは点 $(2, 2)$ である。もう 1 つの共有点の x 座標を求めよ。

(2) 曲線 C_1 上の点 $(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$ における接線を ℓ とする。曲線 C_2 上の点で, その点での接線が ℓ と平行となるものが 1 つある。その点を P とおく。点 P の x 座標を求めよ。

ここで, 第 1 象限において 2 つの曲線 C_1, C_2 で囲まれた図形を D とおく。ただし, D は境界を含むものとする。また, 以下において, 対数は自然対数とする。

(3) 図形 D の面積を求めよ。

(4) $n = 2, 4, 6, 8, 10$ として, 座標平面上に 5 つの点 $(n, \log n)$ を考える。この 5 つの点のうち図形 D 内に含まれるものをすべて求めよ。これを解くにあたって, 以下の数値を用いよ。

$$\log 2 = 0.693, \quad \log 3 = 1.099, \quad \log 5 = 1.609$$

右のページは白紙です。

5 (25 点)

下図で, 三角形 ABC は AB = AC である二等辺三角形である。辺 BC の長さを ℓ とおく。また, BC を底辺とするときの高さを h とおく。辺 AB 上の点 B_1, AC 上の点 C_1, BC 上の点 P_1, Q_1 を四角形 $B_1P_1Q_1C_1$ が正方形となるようにとる。正方形 $B_1P_1Q_1C_1$ の 1 辺の長さを a_1 とする。

(1) a_1 を ℓ, h の式で書け。

次に, AB_1 上の点 B_2, AC_1 上の点 C_2, B_1C_1 上の点 P_2, Q_2 を四角形 $B_2P_2Q_2C_2$ が正方形となるようにとり, 正方形 $B_2P_2Q_2C_2$ の 1 辺の長さを a_2 とする。

(2) a_2 を ℓ, h の式で書け。

続けて a_1, a_2 と同様にして, $n = 3, 4, \ldots$ に対して, AB_{n-1} 上の点 B_n, AC_{n-1} 上の点 C_n, $B_{n-1}C_{n-1}$ 上の点 P_n, Q_n を四角形 $B_nP_nQ_nC_n$ が正方形となるようにとり, 正方形 $B_nP_nQ_nC_n$ の 1 辺の長さを a_n とする。

(3) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を ℓ, h の式で書け。

(4) a_n を ℓ, h, n の式で書け。

(5) $\ell = 6$, $h = 4$ とする。正方形 $B_nP_nQ_nC_n$ の面積を b_n とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ の値を求めよ。