

K 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ミ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) a, b, c, d を実数とし、 A, B, E, O を次の行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -6 & -7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $A^2 = O$ となるのは、 $a = \text{ア}$ 、 $b = \frac{\text{イ} \quad \text{ウ}}{\text{エ}}$ のときである。

(ii) $(A + B)^2 = O$ かつ $(A - B)^2 = E$ となるのは、
 $a = \text{オ}$ 、 $b = \frac{\text{カ} \quad \text{キ}}{\text{ク}}$ 、 $c = \text{ケ}$ 、 $d = \frac{\text{コ} \quad \text{サ}}{\text{シ}}$
のときである。

右のページは白紙です。

- (2) 4 次多項式 $f(x)$ は、 $x^2 - 5x + 6$ で割ると $6x - 23$ 余り、 $x^2 - 2x + 3$ で割ると $-9x + 28$ 余る。さらに $f(x)$ の $x = 1$ での微分係数 $f'(1)$ は -9 である。この $f(x)$ を求めよう。

まず、 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ であることから、

$$f(2) = -\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}}, \quad f(3) = -\boxed{\text{ソ}}$$

が得られる。

一方、 $f(x)$ は a, b, c を定数として

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(x^2 - 2x + 3) + (-9x + 28)$$

と表される。このとき、 $f'(1) = -9$ より $2a + b = \boxed{\text{タ}}$ となる。

以上より、

$$a = \boxed{\text{チ}}, \quad b = -\boxed{\text{ツ}}, \quad c = -\boxed{\text{テ}}$$

と決まる。よって、

$$f(x) = \boxed{\text{ト}}x^4 - \boxed{\text{ナ}}x^3 + \boxed{\text{ニ}}x^2 - \boxed{\text{ヌ}}x + \boxed{\text{ネ}}$$

であることがわかる。

右のページは白紙です。

(3) 平面上の3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad |\vec{c}| = 5, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6, \quad |\vec{b} + \vec{c}| = 7, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} > 0$$

とする。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq \pi$) は $\cos \theta_1 = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ を満たす。また

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ヒ}}$ であるので、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角 θ_2 ($0 \leq \theta_2 \leq \pi$) は $\cos \theta_2 = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ を

満たす。 $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$ に注意することで、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} + \boxed{\text{ミ}}\sqrt{2}$ であることがわかる。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 原点を O とする xy 平面において、放物線 $C: y = x^2$ と、2点 $A(0, -2)$, $P(1, 1)$ を通る直線 ℓ を考える。また、 C と ℓ の共有点のうち、 P と異なる点を Q とする。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。また、点 Q の座標を求めよ。
- (2) 三角形 OPQ の外接円 C' の方程式と、円 C' の中心の座標および半径を求めよ。
- (3) 放物線 C と (2) で求めた円 C' の共有点のうち、 O, P, Q 以外の点の座標を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 関数 $f(x) = \sqrt{x}e^x (x > 0)$ および xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ を考える。ここで、 e は自然対数の底である。

xy 平面上に座標が $(1, 0)$ の点 P_0 をとり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し点 P_n, Q_n を以下のように定める。 x 軸上の点 P_{n-1} が定まったとき、 P_{n-1} から C に引いた接線の接点を Q_n とし、 Q_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を P_n とする。また、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し P_n の x 座標を x_n とおく。

- (1) 曲線 C と x 軸 および 2 直線 $x = a, x = b$ ($0 < a < b$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を a, b を用いて表せ。
- (2) $b > 0$ に対し、点 $(b, f(b))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。また、 ℓ と x 軸との交点の x 座標を a としたとき、 $b - a$ を b を用いて表せ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $x_n - x_{n-1}$ を x_n を用いて表し、 $x_n - x_{n-1} > \frac{1}{2}$ を示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1})$ を求めよ。
- (4) $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し、三角形 $P_{n-1}Q_nP_n$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とし、曲線 C と x 軸 および 2 線分 $P_{n-1}Q_{n-1}, P_nQ_n$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を W_n とする。
このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。