平成 23 年度　　　　　　　　　　〔試験時間　100 分〕

Ｊ１　　数　　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。 2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ヨ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で定義された関数

$$f(\theta) = 8\sin^3\theta - 3\cos 2\theta - 12\sin\theta + 7$$

は，$\theta = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ のときに最大値 $\boxed{ウ エ}$ をとり，

$\theta = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi,\ \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ (順不同) のときに最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとる。

右のページは白紙です。

(2) 以下の行列 A, P を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(i)

$$P^{-1} = \frac{1}{\boxed{\text{サ}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{シ}} & -\boxed{\text{ス}} \\ \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\boxed{\text{タ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$

である。

(ii) x_1, y_1 を実数として，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ および $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。このとき，

$$u_{n+1} = -\boxed{\text{ツ}}\, u_n, \quad v_{n+1} = \boxed{\text{テ}}\, v_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。x_n, y_n を u_n, v_n で表すと，

$$x_n = \boxed{\text{ト}}\, u_n + \boxed{\text{ナ}}\, v_n, \quad y_n = -\boxed{\text{ニ}}\, u_n + \boxed{\text{ヌ}}\, v_n$$

であるから，たとえば，$x_1 = 1$, $y_1 = -2$ のときには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$

であり，$x_1 = 2$, $y_1 = 1$ のときには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

右のページは白紙です。

(3)　整数 l, m, n についての連立方程式

$$7l = 4m + 3 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$lm = 139 - 28n^2 + l + m \quad \cdots\cdots \quad ②$$

を考える。まず，① を満たす整数 l, m は必ず，ある整数 k を用いて

$$l = \boxed{フ}k + 1$$

$$m = \boxed{ヘ}k + \boxed{ホ}$$

と表される。逆に，この形で書ける l, m は ① を満たしている。これらを ② に代入することにより，①, ② を満たす整数の組 (l, m, n) は全部で $\boxed{マ}$ 通りあることがわかる。そのうち l, m, n のすべてが正であるものは 2 通りあり，$(l, m, n) = (\boxed{ミ}, \boxed{ム}, \boxed{メ}), (\boxed{モ}, \boxed{ヤユ}, \boxed{ヨ})$ である。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x + (1+x)\log(1+x) \quad (x \geqq 0)$$

と定める。log は自然対数を表す。

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を計算し，$0 \leqq x \leqq 1$ における関数 $f(x)$ の増減および曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べよ。ここで，$f'(x)$, $f''(x)$ は，それぞれ $f(x)$ の第 1 次導関数および第 2 次導関数を表す。

(2) xy 平面において，曲線 $y = f(x)$, x 軸 および 直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = nx^n + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \geqq 0)$$

と定める。xy 平面において，曲線 $y = f_n(x)$, x 軸 および 直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を S_n とおく。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

ただし，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ を用いてよい。e は自然対数の底である。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ 2 次の多項式 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ をそれぞれ

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x), \quad Q(x) = -x^2 + 1, \quad R(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

とおく。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において $P(x), Q(x), R(x)$ がとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。

(2) $f(x)$ が 2 次以下の多項式ならば，恒等式

$$f(x) = f(-1)P(x) + f(0)Q(x) + f(1)R(x)$$

が成り立つことを示せ。

さて a, b, c を実数として，$f(x) = aP(x) + bQ(x) + cR(x)$ とする。a, b, c を 次の条件を満たすように動かす。

(条件) $$\begin{cases} 0 \leqq f(-1) \leqq 1 \\ 0 \leqq f(0) \leqq 1 \\ 0 \leqq f(1) \leqq 1 \end{cases}$$

このとき，xy 平面において 関数 $y = f(x)$ のグラフが通ることのできる部分を D とおく。

(3) xy 平面において，D のうち x 座標が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にある部分の面積を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。