平成 23 年度　　　　〔試験時間　100 分〕

H 1　数　学

この冊子は，数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し，さらに受験番号・志望学科をマークしてください。

(3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。 2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の文章中の $\boxed{ア}$ から $\boxed{ヘ}$ までに当てはまる数字 0 ～ 9 を求めて，**解答用マークシート**の指定された欄にマークしなさい。 ただし，分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 1 辺の長さが 1 の正方形を A_1 とし，その各辺の中点を頂点とする正方形を A_2，同様に A_2 の各辺の中点を頂点とする正方形を A_3，以下，A_k の各辺の中点を頂点とする正方形を A_{k+1} として，正方形の列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ を考える。

(i) A_1 から A_8 までの正方形の周囲の長さの和は $\dfrac{\boxed{アイ}}{4}\left(\boxed{ウ}+\sqrt{\boxed{エ}}\right)$ である。

(ii) A_1 から A_8 までの正方形の面積の和は $\dfrac{\boxed{オカキ}}{\boxed{クケコ}}$ である。

右のページは白紙です。

(2) 1から9までの9個の数字を考える。これらの数字の中から異なる5個の数字を取り出して5桁の正の整数 m を作る。

(i) m が偶数である確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(ii) m の1桁目, 3桁目, 5桁目の数字は偶数で，2桁目, 4桁目の数字は奇数である確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

なお，1桁目は一の位，2桁目は十の位，3桁目は百の位，…… を表す。

(iii) m が，奇数の数字と偶数の数字が交互に並んだ整数となる確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$ である。

(iv) m が 89823 より大きい整数である確率は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) a, b を 0 でない実数として，行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -ab \\ a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。

(i) $AB = BA$ のとき $b = \boxed{ナ}$ である。

(ii) A^3 が単位行列 E の実数倍になるのは，$a^2b = \boxed{ニヌ}$ のときであり，このとき，

$$A^3 = -\boxed{ネノ}E$$

となる。

(iii) $AB = BA$ で A^3 が単位行列 E の実数倍であるとき，

$$(A+B)^3 + (A-B)^3 = -\boxed{ハヒフ}E - \boxed{ヘ}A$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{2}$ の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{2}$ 定数 $a\ (a<1), b, c$ に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+b)x - a + c$$

と定める。曲線 $C : y = f(x)$ は点 $\mathrm{A}(1, 3)$ を通り，点 A において直線 $\ell : y = 2x + 1$ と接しているとする。曲線 C と直線 ℓ の共有点のうち，点 A と異なる点を B とする。

(1) b, c の値を求めよ。

(2) 点 B の座標を a を用いて表せ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S_1 を，a を用いて表せ。

(4) x が $a < x < 1$ の範囲を動くとき，3 点 $\mathrm{P}(x, f(x)), \mathrm{A}, \mathrm{B}$ が作る三角形 PAB の面積の最大値を S_2 とする。S_2 と，(3) で求めた面積 S_1 に対して，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 $\boxed{3}$ の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

$\boxed{3}$ a, b は $0 < a < b$ を満たす正の実数として，定積分 I_1, I_2, I_3 を

$$I_1 = \int_a^b \sin(x^2)dx, \qquad I_2 = \int_a^b \frac{\cos(x^2)}{x^2}dx, \qquad I_3 = \int_a^b \frac{\sin(x^2)}{x^4}dx$$

と定める。

(1) $\displaystyle\int_a^b \sin(x^2)dx = \int_a^b \frac{1}{2x}\cdot 2x\sin(x^2)dx$ と変形してから部分積分法を利用することにより，$I_1 + \dfrac{1}{2}I_2$ の値を，a と b を用いて表せ。

(2) $I_2 - \dfrac{3}{2}I_3$ の値を，a と b を用いて表せ。

(3) 正の整数 n に対して

$$K_n = \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{2(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx + \frac{3}{4}\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{2(n+1)\pi}} \frac{\sin(x^2)}{x^4}\,dx$$

と定めるとき，

$$\lim_{n\to\infty} 2n\pi\sqrt{2n\pi}\,K_n$$

の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。