

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページおよび白紙 1 枚，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60点)

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

- (i) N の正の約数は 12 個.
- (ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

(下書き用紙)

2 (60点)

実数 x の関数 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1 + \sin^2 t} dt$ の最大値と最小値を求めよ.

(下書き用紙)

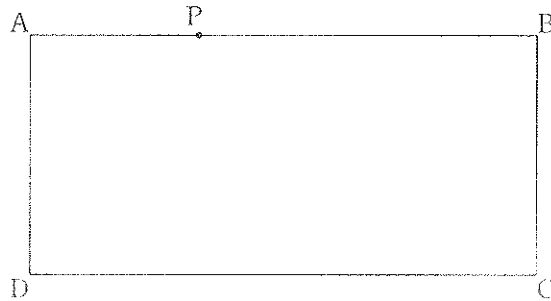
3

(60点)

a を 1 以上の実数とする. 図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている. ただし $AD = 1$, $AB = a$ である. P を辺 AB 上の点とし, $AP = x$ とする. 頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき, もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする.

(1) S を a と x で表せ.

(2) $a = 1$ とする. P が A から B まで動くとき, S を最大にするような x の値を求めよ.



なお配布された白紙を自由に使ってよい. (白紙は回収しない.)

(下 書 き 用 紙)

4

(60点)

n は正の整数とし、文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。 A_n の要素に対し次の条件(*)を考える。

(*) 文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき、どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき、それが条件(*)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2) $n \geq 12$ とする。 A_n から要素を一つ選んだところ、これは条件(*)を満たし、その 7 番目の文字は c であった。このとき、この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$ を求めよ。

(下書き用紙)

5

(60点)

実数 a, b, c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, $f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく. また, 複素数平面内の単位円周から 2 点 $1, -1$ を除いたものを T とする.

(1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ.

(2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば,

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ.

(3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ.

(下書き用紙)

