

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページ，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1

(60点)

a を正の定数とし、放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ を C_1 とする.

(1) 点 P が C_1 上を動くとき、 P と点 $Q \left(2a, \frac{a^2}{4} - 2 \right)$ の距離の最小値を求めよ.

(2) Q を中心とする円 $(x - 2a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4} + 2 \right)^2 = 2a^2$ を C_2 とする. P が C_1 上を動き、点 R が C_2 上を動くとき、 P と R の距離の最小値を求めよ.

(下書き用紙)

2 (60点)

$\triangle ABC$ を一辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り、出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて、点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に

$$\vec{BP} = \frac{X}{6} \vec{BC}, \quad \vec{CQ} = \frac{Y}{6} \vec{CA}, \quad \vec{AR} = \frac{Z}{6} \vec{AB}$$

をみたすように取る。

- (1) $\triangle PQR$ が正三角形になる確率を求めよ。

- (2) 点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1 、点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2 、点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。 T_1, T_2, T_3 のうち、ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

- (3) $\triangle PQR$ の面積を S とし、 S のとりうる値の最小値を m とする。 m の値および $S = m$ となる確率を求めよ。

(下書き用紙)

3

(60 点)

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており、 S_1 と S_2 は外接している。

- (1) S_1, S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1, P_2 とする。線分 P_1P_2 の長さを求めよ。
- (2) α の上に乗っており、 S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は、1つの円の上または1つの直線の上にあることを示せ。

(下書き用紙)

4

(60点)

n を 2 以上の自然数とする.

- (1) n が素数または 4 のとき, $(n - 1)!$ は n で割り切れないことを示せ.
- (2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき, $(n - 1)!$ は n で割り切れることを示せ.

(下書き用紙)

5

(60点)

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ である.

- (1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を計算し、 C の概形を図示せよ.

- (2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(下書き用紙)