（平成27年度前期日程）

数　　　学

180　分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は10ページ，答案用紙の冊子は5ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下2桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

試験問題は，つぎのページより始まります。

$\boxed{1}$ (60 点)

数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 5,\ a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列$\{b_n\}$を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(2) すべてのnに対して，不等式$b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ．

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$を求めよ．

（下 書 き 用 紙）

2 (60 点)

四面体OABCにおいて，OA = OB = OC = BC = 1，AB = AC = xとする．頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする．頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし，平面OBCとの交点をH′とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s\vec{b}+t\vec{c}$と表す．このとき，$p$，$q$，$r$および$s$，$t$を$x$の式で表せ．

(2) 四面体OABCの体積Vをxの式で表せ．また，xが変化するときのVの最大値を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{3}$ (60 点)

$a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)\ (-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\, ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx$$

を示せ．

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t > 0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = t^2 \cos t,\ \ y = t^2 \sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t > 0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，不等式 $t_2 - t_1 < \pi$ を示せ．

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$ (60 点)

n を相異なる素数 p_1, p_2, $\cdots$, p_k $(k \geqq 1)$ の積とする．a, b を n の約数とするとき，a, b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする．

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ．

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ．

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ．

(下　書　き　用　紙)