

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページ、答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し、下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は、下記の例にならい、明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60点)

- (1) 2次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解 α, β に対し, $\alpha^n + \beta^n - 3^n$ はすべての正の整数 n について5の整数倍になることを示せ.
- (2) 6個のさいころを同時に投げるとき, ちょうど4種類の目が出る確率を既約分数で表せ.

(下書き用紙)

2

(60点)

2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\Delta(A) = ad - bc$, $t(A) = a + d$ と定める.

(1) 2次の正方行列 A, B に対して, $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ.

(2) A の成分がすべて実数で, $A^5 = E$ が成り立つとき, $x = \Delta(A)$ と $y = t(A)$ の値を求めよ. ただし, E は2次の単位行列とする.

(下書き用紙)

3 (60点)

k を定数とするとき, 方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ.

(下書き用紙)

4 (60点)

正の整数 n に対し, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(下書き用紙)

5

(60点)

a, b を正の実数とし、円 $C_1: (x-a)^2 + y^2 = a^2$ と楕円 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。

(1) C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ。

(2) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とし、 C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき、第1象限における C_1 と C_2 の接点の座標 (p, q) を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで、 $x \geq p$ の範囲において、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

(下書き用紙)

