(2020年度)

5　数　学　問　題 (90分)

(この問題冊子は6ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能を使用してはならない。また，スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ − にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，− にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に −26 をマークする場合。

	符号	10の位											1の位										
	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

1 n を自然数とする。x の n 次式 $P_n(x)$ で

$$\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} = P_n(\cos\theta) \quad (0 < \theta < \pi)$$

であるものを考える。

(1)

$$P_1(x) = \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$$
$$P_2(x) = \boxed{\text{ウ}}\,x^2 + \boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$$
$$P_3(x) = \boxed{\text{カ}}\,x^3 + \boxed{\text{キ}}\,x^2 + \boxed{\text{ク}}\,x + \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(2) x についての恒等式

$$P_{n+1}(x) = \boxed{\text{コ}}\,xP_n(x) + \boxed{\text{サ}}\,P_{n-1}(x) \quad (n \geqq 2)$$

が成り立つ。

(3) $P_4(x)$ の x^4 の項の係数は $\boxed{\text{シ}}$ であり，$P_4(1) = \boxed{\text{ス}}$ である。

(4) $P_4(\cos\theta) = 0$ となる最小の $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ は $\theta = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$ である。

(5)

$$\left(1 - \cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1 - \cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

2 $\log t$ を t の自然対数, e を自然対数の底とする。正の定数 a に対し, x の関数

$$f(x) = \log(ae^{-x} + e^{2x}) + e^{-x}$$

が $x = \log 2$ で極小値をとるとする。

(1) $a = \boxed{\text{ツ}}$ である。

(2) 点 $(0, f(0))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を $(p, 0)$ とする。

(i)

$$p = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \log 3$$

である。

(ii) 直線 $y = m(x - p)$ が曲線 $y = f(x)$ の下側にあるような傾き m の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} < m \leqq \boxed{\text{ノ}}$$

である。

(3)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} f(t)dt = \boxed{\text{ハ}}$$

である。

3 座標空間において, 点 $\mathrm{C}(0,0,2)$ を中心とする半径1の球面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 P' が条件

「直線 PP' はベクトル $(2,0,-1)$ に平行で, 球面 S と点 P で接する」

を満たしながら動くとき, 線分 PP' の動いてできる面を T とする。

(1) 点 $\mathrm{P}'(a,b,0)$ の軌跡は長軸の長さ $\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$, 短軸の長さ $\boxed{\text{ヘ}}$ の楕円であり, a,b は

$$a^2+\boxed{\text{ホ}}\,b^2+\boxed{\text{マ}}\,a+\boxed{\text{ミ}}\,b+\boxed{\text{ム}}=0$$

を満たす。

(2) 線分 PP' の長さの最小値は $\boxed{\text{メ}}\sqrt{\boxed{\text{モ}}}+\boxed{\text{ヤ}}$ である。

(3) 点 P の軌跡を含む平面を α とする。平面 α, 面 T および xy 平面で囲まれてできる立体の体積は

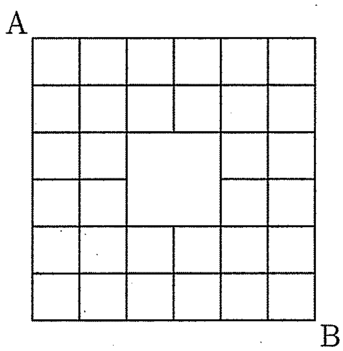
$$\boxed{\text{ユ}}\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}\,\pi$$

である。

$\boxed{4}$

(1) 4個の玉の入った袋 A と3個の玉の入った袋 B がある。袋 A, B のいずれかを等確率で選び，そこから玉を1つ取り出すという試行を考える。A, B のいずれかが空になるまでこの試行を繰り返す。このとき，袋 B が空になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ である。

(2) 下図において，動点 P は点 A を，動点 Q は点 B を同時に出発して線上を同じ速さで動く。P, Q は出会ったときに移動を止める。このとき，P, Q それぞれがたどった経路の長さの和が最小になる場合の数は $\boxed{\text{ル}}$ である。



図の中央を除く各マス目は同じ大きさの正方形である