(2019年度)

5　数　学　問　題　(90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能を使用してはならない。また，スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ － にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄とも Z にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－ にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}\sqrt{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\square\, x^2+\square\, x+\square$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{\mathbf{1}}$ O を原点とする座標空間に 2 点 $A(-1, 2, 2\sqrt{2})$, $B(0, 2, \sqrt{2})$ がある。

(1) 平面 $y=-1$ 上の点 P が $OA \perp OP$ かつ $OB \perp OP$ を満たすとき, P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}, -1, \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$ である。また,

$\cos\angle BAP = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり, $\triangle ABP$ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 点 Q が $AQ = BQ$ かつ $OQ = \sqrt{6}$ を満たしながら動くとする。このとき, Q の y 座標の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり, Q の z 座標の最大値は $\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{2}\right)$ である。また, Q の軌跡は半径 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ の円である。

$\boxed{2}$ 実数からなる無限数列 $\{a_n\}$ に対する次の条件 p を考える。

p：「N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n \leqq 2$」が成り立つような自然数 N が存在する

(1) 選択肢 1 から, p を満たす数列をすべて選べ。1 つもない場合は Z をマークせよ。

選択肢 1：

A. $\{n\}$　　B. $\left\{\dfrac{8}{n}\right\}$　　C. $\left\{(-1)^n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\right\}$

D. $\{\log n\}$　　E. $\left\{\dfrac{n^2-3}{n+2}\right\}$　　F. $\{3\sin n\}$

(2) 次の条件 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 を考える。

q_1：すべての自然数 n に対して $a_n \leqq 2$ である

q_2：集合 $\{n \mid a_n > 2,\ n$ は自然数$\}$ が空集合または有限集合である

q_3：集合 $\{n \mid a_n \leqq 2,\ n$ は自然数$\}$ が無限集合である

q_4：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

q_5：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

以下の $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{お}}$ にあてはまるものを選択肢 2 から選べ。

(i) q_1 は p であるための $\boxed{\text{あ}}$

(ii) q_2 は p であるための $\boxed{\text{い}}$

(iii) q_3 は p であるための $\boxed{\text{う}}$

(iv) q_4 は p であるための $\boxed{\text{え}}$

(v) q_5 は p であるための $\boxed{\text{お}}$

(3) p の否定 $\overline{p}$, および次の条件 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ を考える。

r_1 : $a_n > 2$ を満たす自然数 n が存在する

r_2 : 集合 $\{n \mid a_n > 2,\ n$ は自然数$\}$ が無限集合である

r_3 : 集合 $\{n \mid a_n > 2,\ n$ は自然数$\}$ が空集合ではなく，かつ，この集合に最大の要素が存在しない

r_4 : 「N 以上のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$」が成り立つような自然数 N が存在する

r_5 : 「N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n \leqq 2$」が成り立つような自然数 N が存在する

r_6 : 「N 以下のすべての自然数 n に対して $a_n > 2$」が成り立つような自然数 N が存在する

以下の $\boxed{か}$ ～ $\boxed{さ}$ にあてはまるものを選択肢２から選べ。

(i) r_1 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{か}$

(ii) r_2 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{き}$

(iii) r_3 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{く}$

(iv) r_4 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{け}$

(v) r_5 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{こ}$

(vi) r_6 は $\overline{p}$ であるための $\boxed{さ}$

選択肢２：

A. 必要十分条件である。

B. 必要条件であるが十分条件ではない。

C. 十分条件であるが必要条件ではない。

D. 必要条件でも十分条件でもない。

$\boxed{3}$ $\alpha = \log_2 3$ とし, 自然数 n に対して

$$a_n = [n\alpha], \quad b_n = \left[\frac{n\alpha}{\alpha - 1}\right]$$

とする。ただし, 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $a_5 = \boxed{ス}$ である。

(2) $b_3 = k$ とおくと, 不等式

$$\frac{3^{k+c}}{2^k} \leqq 1 < \frac{3^{k+1+c}}{2^{k+1}}$$

が整数 $c = \boxed{セ}$ で成り立ち, $b_3 = \boxed{ソ}$ であることがわかる。

(3) $a_n \leqq 10$ を満たす自然数 n の個数は $\boxed{タ}$ である。

(4) $b_n \leqq 10$ を満たす自然数 n の個数は $\boxed{チ}$ である。

(5) $a_n \leqq 50$ を満たす自然数 n の個数を s とし, $b_n \leqq 50$ を満たす自然数 n の個数を t とする。このとき, $s + t = \boxed{ツ}$ である。

$\boxed{4}$ 座標平面において, 軸が y 軸と平行な放物線 C は, 原点を通り, 直線 $\ell : y = -x + 2$ と接している。C と ℓ の接点の x 座標を t とし, t が正の実数を動くとき, C の頂点 A が描く曲線を D とする。

(1) A の座標は

$$\left(\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}} t\left(t + \boxed{ナ}\right),\ \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\left(t + \boxed{ネ}\right)^2 \right)$$

である。

(2) $0 < t < 4$ のとき, C と x 軸で囲まれた部分の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$ である。

(3) D の接線のうち, 接点が第 2 象限にあるものを考える。このとき, 接線の傾き k のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}} < k < \boxed{ヘ}$$

である。

(4) D と y 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}$ である。

(5) A の座標を (x, y) とすると, t によらず

$$x^2 + \boxed{ミ}\, xy + \boxed{ム}\, y^2 + \boxed{メ}\, y = 0$$

が成り立つ。