（2019年度）

3　数　学　問　題　(60分)

（この問題冊子は５ページ，３問である。）

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能を使用してはならない。また，スマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ $-$ にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄とも Z にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，$-$ にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	―	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	―	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ (1) 2つの整数 50381 と 49883 の最大公約数は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 整式

$$f(x) = -\left(\log_{\frac{1}{4}} 16\right) x^3 - \left(\log_{\frac{1}{4}} 64\right) x^2 + 6\left(\log_{\frac{1}{4}} 4096\right) x + 3\left(\log_{\frac{1}{4}} 256\right)$$

を整数を係数とする整式で表すと,

$$f(x) = \boxed{\text{イ}}\, x^3 + \boxed{\text{ウ}}\, x^2 + \boxed{\text{エ}}\, x + \boxed{\text{オ}}$$

である。したがって, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{カ}}$ で極大値 $\boxed{\text{キ}}$,
$x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる。

(3) 石を n 個直線状に並べることを考える。それぞれの石の色は確率 $\dfrac{1}{2}$ で白または黒であるとする。このとき, 同じ色の石が続く部分が r 個できたとする。例えば, $n = 5$ で

○●○●●

と並べたならば, 左から, 白 1 個の部分, 黒 1 個の部分, 白 1 個の部分, 黒 2 個の部分, となるので, $r = 4$ である。$n = 5$ のとき, $r = 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また, $n = 7$ のとき, r が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ aを正の実数とし，

$$f(x) = x^2 - 2a, \quad g(x) = -(x-a)^2$$

とする。

(1) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点をもつための必要十分条件は，

$$a \leqq \boxed{\text{セ}}$$

である。また，$a = \dfrac{1}{2} \times \boxed{\text{セ}}$ のとき，放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(2) $a > \boxed{\text{セ}}$ のとき，放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ には共通接線が2本ある。

(i) $a = 2 \times \boxed{\text{セ}}$ のときの共通接線の傾きのうち，小さい方の傾きは $\boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(ii) 2本の共通接線の交点は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}a,\ \boxed{\text{ニ}}\,a\right)$$

である。

$\boxed{3}$ $\triangle$OAB を考える。辺 OA を 1 : 2 に内分する点を A_1, 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を A_2 とする。同様に, 辺 OB を 1 : 2 に内分する点を B_1, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を B_2 とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1) 直線 A_1B と直線 AB_1 の交点を P とするとき,

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\vec{b}$$

である。また, 直線 A_2B と直線 AB_2 の交点を Q とするとき,

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}\vec{b}$$

である。さらに, 直線 A_1B と直線 AB_2 の交点を R とするとき,

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{マ}}{\boxed{ミ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ム}}{\boxed{メ}}\vec{b}$$

である。

(2) 直線 A_2B と直線 AB_1 の交点を S とする。$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ のとき, 四角形 PRQS の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{モ}}{\boxed{ヤ}}$ であり, この最大値をとるのは $\angle AOB=\dfrac{\boxed{ユ}}{\boxed{ヨ}}\pi$ のときである。