

(2017年度)

5 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ、4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に、試験監督者から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し、所定の欄に氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. 解答は、解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき、マーク欄からはみ出したり、白い部分を残したり、文字や番号、○や×をつけたりしてはならない。また、マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみーにマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、ーにはマークしない。)

[解答記入例] アに7、イに-26をマークする場合。

符号	10の位										1の位												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

[解答表示例]

$\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\Box}{\Box}$ にあてはめる場合 $\frac{-3}{2}$ とする。

0を、 $\frac{\Box}{\Box}$ にあてはめる場合 $\frac{0}{1}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\Box}{\Box} \sqrt{\Box}$ にあてはめる場合 $\frac{-1}{2} \sqrt{3}$ とする。

$-x^2 + x$ を、 $\Box x^2 + \Box x + \Box$ にあてはめる場合

$-1 x^2 + 1 x + 0$ とする。

1 i を虚数単位とする。

(1) $\alpha = 2 + (1 - \sqrt{3})i$, $\beta = 1 + 3i$ を複素数平面上の点とする。

(i) 点 β を中心として、点 α を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると、

$$\left(\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \right) + \boxed{\text{ウ}} i$$

になる。

(ii) 点 $\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} i$ を中心として、点 α を反時計回りに $\frac{5}{6}\pi$ だけ回転すると、点 β に重なる。

(2) 複素数 z は $|z| = 1$ を満たすとする。

$$w = \frac{-z + 2i}{2z + i}$$

とおくとき、 $|w|$ のとり得る値の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ 、最小値は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$

である。

- 2** 座標空間に点 $A(0, -1, 4)$, $B(5, -1, 4)$, $C(3, 0, 1)$, $D(3, 4, 4)$ があり, 点 M, N がそれぞれ一定の速度で直線 AB, CD 上を動いている。 M, N は時刻 $t = 0$ でそれぞれ A, C にあり, 時刻 $t = 5$ ではそれぞれ B, D にあるとする。

(1) 時刻 t において,

$$M\left(\boxed{\text{ケ}} t, -1, 4\right), \quad N\left(3, \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}t, \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}t + 1\right)$$

である。

(2) $t = \boxed{\text{セ}}$ のとき, MN は最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ をとる。

(3) 3点 $(0, 0, 1)$, M, N を頂点とする三角形の面積は, $t = \boxed{\text{タ}}$ の

とき, 最小値 $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ をとる。

3 e を自然対数の底とする。 $y = e^x$ で表される曲線を C とし、原点から C へ引いた接線を ℓ とする。曲線 C 、直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) C と ℓ の接点の x 座標は ト である。

(2) D の面積は $\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}e + \frac{\text{ヌ}}{\text{ヌ}}$ である。

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\pi \left(\frac{e^2}{\text{ネ}} + \frac{\text{ノ}}{\text{ハ}} \right)$$

である。

(4) $a = \boxed{\text{ヒ}}, b = \boxed{\text{フ}}$ であるとき、

$$\frac{d}{dx} \{(x^2 + ax + b)e^x\} = x^2 e^x$$

となる。

(5) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\pi \left(\frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}} e + \boxed{\text{マ}} \right)$$

である。

4 m を 5 以上の自然数とする。 m 個の点を平面にある円周上に等間隔に並べる。これら m 個の点に、時計回りに順番に $1, 2, \dots, m$ と番号を付ける。以下、隣り合った点を時計回りに移動することを「進む」といい、反時計回りに移動することを「戻る」ということとする。例えば、点 1 から 3 つ進むと点 4 に移動し、点 m から 3 つ進むと点 3 に移動し、点 1 から 3 つ戻ると点 $(m - 2)$ に移動する。次の 2 つの操作を考える。

(操作 A) 5 つ進み、移動した点に白石を置く。

(操作 B) 2 つ戻り、移動した点に黒石を置く。

ある人が点 m を出発点として操作 A を行い、次に操作 B を行い、以下交互に操作 A と操作 B を繰り返し移動を続け、すべての点に石を置いたら操作を終了する。ただし、移動した点にすでに石が置かれている場合は、その石を取り除いて新たに石を置くものとする。

(1) $m = 10$ のとき、ミ回石を置くと操作は終了する。終了したとき、最後にいる点の番号は ムであり、置かれている黒石は メ個である。

(2) $m = 11$ のとき、モ回石を置くと操作は終了する。終了したとき、最後にいる点の番号は ヤであり、置かれている黒石は ユ個である。

(3) $m = 12$ のとき、番号 ヨ, ラ, リ, ルの点には石が置かれず操作は終了しない。ただし、ヨ < ラ < リ < ルである。

(4) 操作が終了しないための必要十分条件は、 m が レ で割り切
れることである。 m が自然数 n を用いて $m = \boxed{\quad} n + 1$ と表
されるとき、 口 $n + \boxed{\quad}$ ワ 回石を置くと操作は終了し、終了
したときに置かれている黒石は ヲ $n + \boxed{\quad}$ ン 個である。

