

(2017年度)

## 5 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ, 4問である。)

### 受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 試験監督者から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. 解答は, 解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけたりしてはならない。また, マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。



**1**  $i$  を虚数単位とする。

(1)  $\alpha = 2 + (1 - \sqrt{3})i$ ,  $\beta = 1 + 3i$  を複素数平面上の点とする。

(i) 点  $\beta$  を中心として, 点  $\alpha$  を反時計回りに  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転すると,

$$\left( \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \right) + \boxed{\text{ウ}} i$$

になる。

(ii) 点  $\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} i$  を中心として, 点  $\alpha$  を反時計回りに  $\frac{5}{6}\pi$  だけ回転すると, 点  $\beta$  に重なる。

(2) 複素数  $z$  は  $|z| = 1$  を満たすとする。

$$w = \frac{-z + 2i}{2z + i}$$

とおくとき,  $|w|$  のとり得る値の最大値は  $\boxed{\text{カ}}$ , 最小値は  $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$

である。

- 2 座標空間に点  $A(0, -1, 4)$ ,  $B(5, -1, 4)$ ,  $C(3, 0, 1)$ ,  $D(3, 4, 4)$  があり, 点  $M, N$  がそれぞれ一定の速度で直線  $AB, CD$  上を動いている。  $M, N$  は時刻  $t = 0$  でそれぞれ  $A, C$  にあり, 時刻  $t = 5$  ではそれぞれ  $B, D$  にあるとする。

(1) 時刻  $t$  において,

$$M\left(\boxed{\text{ケ}}t, -1, 4\right), \quad N\left(3, \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}t, \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}t+1\right)$$

である。

(2)  $t = \boxed{\text{セ}}$  のとき,  $MN$  は最小値  $\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$  をとる。

(3) 3点  $(0, 0, 1)$ ,  $M, N$  を頂点とする三角形の面積は,  $t = \boxed{\text{タ}}$  の

とき, 最小値  $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$  をとる。

3  $e$ を自然対数の底とする。 $y = e^x$ で表される曲線を  $C$ とし、原点から  $C$ へ引いた接線を  $l$ とする。曲線  $C$ 、直線  $l$ および  $y$ 軸で囲まれた図形を  $D$ とする。

(1)  $C$ と  $l$ の接点の  $x$ 座標は  $\square$  ト  $\square$  である。

(2)  $D$ の面積は  $\frac{\square}{\square}$  ナ  $\square$   $e + \square$  ヌ  $\square$  である。

(3)  $D$ を  $x$ 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は

$$\pi \left( \frac{e^2}{\square} \text{ネ} + \frac{\square}{\square} \text{ノ} \text{ハ} \right)$$

である。

(4)  $a = \square$  ヒ  $\square$ ,  $b = \square$  フ  $\square$  であるとき、

$$\frac{d}{dx} \{(x^2 + ax + b)e^x\} = x^2 e^x$$

となる。

(5)  $D$ を  $y$ 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積は

$$\pi \left( \frac{\square}{\square} \text{ホ} e + \square \text{マ} \right)$$

である。

4  $m$  を 5 以上の自然数とする。  $m$  個の点を平面にある円周上に等間隔に並べる。これら  $m$  個の点に、時計回りに順番に  $1, 2, \dots, m$  と番号を付ける。以下、隣り合った点を時計回りに移動することを「進む」といい、反時計回りに移動することを「戻る」ということとする。例えば、点 1 から 3 つ進むと点 4 に移動し、点  $m$  から 3 つ進むと点 3 に移動し、点 1 から 3 つ戻ると点  $(m-2)$  に移動する。次の 2 つの操作を考える。

(操作 A) 5 つ進む、移動した点に白石を置く。

(操作 B) 2 つ戻り、移動した点に黒石を置く。

ある人が点  $m$  を出発点として操作 A を行い、次に操作 B を行い、以下交互に操作 A と操作 B を繰り返し移動を続け、すべての点に石を置いたら操作を終了する。ただし、移動した点にすでに石が置かれている場合は、その石を取り除いて新たに石を置くものとする。

(1)  $m = 10$  のとき、  回石を置くと操作は終了する。終了したとき、最後にいる点の番号は  であり、置かれている黒石は  個である。

(2)  $m = 11$  のとき、  回石を置くと操作は終了する。終了したとき、最後にいる点の番号は  であり、置かれている黒石は  個である。

(3)  $m = 12$  のとき、番号 , , ,  の点には石が置かれず操作は終了しない。  
ただし、  <  <  <  である。

(4) 操作が終了しないための必要十分条件は、 $m$ が  $\square$ レ $\square$  で割り切れることである。 $m$ が自然数  $n$  を用いて  $m = \square$ レ $\square$   $n+1$  と表される時、 $\square$ ロ $\square$   $n + \square$ ワ $\square$  回石を置くと操作は終了し、終了したときに置かれている黒石は  $\square$ ヲ $\square$   $n + \square$ ン $\square$  個である。

