(2017年度)

# 3　数　学　問　題　(60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

## 受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。**万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

## マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ － にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－ にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7， イ に －26 をマークする場合。

| | 符号 | 10 の 位 | 1 の 位 |
|---|---|---|---|
| ア | － ○ | 0● 1○ 2○ 3○ 4○ 5○ 6○ 7○ 8○ 9○ Z○ | 0○ 1○ 2○ 3○ 4○ 5○ 6○ 7● 8○ 9○ Z○ |
| イ | － ● | 0○ 1○ 2● 3○ 4○ 5○ 6○ 7○ 8○ 9○ Z○ | 0○ 1○ 2○ 3○ 4○ 5○ 6● 7○ 8○ 9○ Z○ |

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}\sqrt{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\square\, x^2 + \square\, x + \square$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\, x^2 + \boxed{1}\, x + \boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ (1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x (at^2 - 5t + a)dt \quad (x > 0)$$

とする。ただし, $a$ を正の実数とする。

(i) $f(x)$ は, $0 < a < \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ ならば極値をとり,

$a \geqq \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ ならば極値をとらない。

(ii) $f(x)$ が極値をとらない場合を考える。$y = f(x)$ のグラフにおいて, 接線の傾きが最小となる接点の $y$ 座標は, $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\left(1 + \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} \cdot \dfrac{1}{a^2}\right)$ である。

(2) 2 つの整式 $f(x)$, $g(x)$ は, 次の 3 つの条件を満たす。

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x^2) = x^2 f(x) + x^3 - 1 \\ f(x+1) + (x-1)\{g(x-1) - 1\} = 2f(x) + \{g(1)\}^2 + 1 \end{cases}$$

(i) $f(3) = \boxed{キ}$, $g(3) = \boxed{ク}$ である。

(ii) $f(2x^2) + g(3)\,x^2$ を $2x - 1$ で割ったときの余りは, $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

**2** 一辺の長さが 3 の立方体 ABCD−EFGH を考え，辺 BF を 3 : 1 に内分する点を P，辺 DH を 1 : 1 に内分する点を Q とする。直線 AP と直線 EF の交点を I，直線 AQ と直線 EH の交点を J とし，3 点 A，P，Q の定める平面を $\alpha$ とする。

(1) FI の長さは $\boxed{サ}$ であり，HJ の長さは $\boxed{シ}$ である。

(2) 直線 FG と平面 $\alpha$ の交点を K とする。このとき，

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{AI} + \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\overrightarrow{AJ}$$

である。

(3) 立方体 ABCD−EFGH を平面 $\alpha$ で切断したときの切断面の周の長さは，

$$\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}} + \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\sqrt{\boxed{ナ}} + \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\sqrt{\boxed{ネ}}$$

である。ただし，$\boxed{ナ} < \boxed{ネ}$ とする。

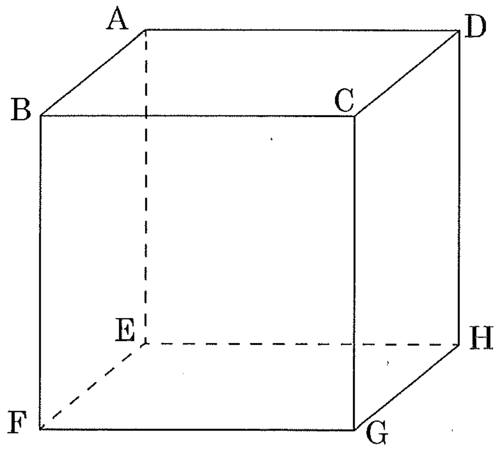
(4) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ とする。このとき，

$$\overrightarrow{CE} = \boxed{ノ}\,\vec{b} + \boxed{ハ}\,\vec{d} + \boxed{ヒ}\,\vec{e}$$

である。また，直線 CE と平面 $\alpha$ の交点を L とすると，

$$\overrightarrow{CL} = \frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}\overrightarrow{CE}$$

である。


A
D
B
C
E
H
F
G

**3** 次の２式を満たす整数$p, q, r$がある。

$$p + q + r = 6, \qquad p^2 = q^2 + r^2$$

(1) $(p, q, r)$のとり得る組は全部で $\boxed{\text{ホ}}$ 組ある。$r$のとり得る値のうち最小の$r$は $\boxed{\text{マ}}$ であり，このとき $p = \boxed{\text{ミ}}$，$q = \boxed{\text{ム}}$ である。

(2) $(p, q, r)$のとり得るすべての組を$r$の値が大きいものから順に

$$(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2), (p_3, q_3, r_3), \cdots$$

と並べる。

(i) $|p_1 q_1| = a$とおく。$a$以下の自然数のうち，$a$と互いに素である数の個数は $\boxed{\text{メ}}$ 個である。

(ii) $|p_2|^{r_2}$を$|q_2|$進法で表したときの$|q_2|^0$の位の数字は $\boxed{\text{モ}}$ である。

(iii) $p_3 x + q_3 y = r_3$を満たす$x$, $y$がともに２桁（けた）となる自然数$(x, y)$の組は $\boxed{\text{ヤ}}$ 組ある。このうち最小の$x$は $\boxed{\text{ユ}}$ であり，このとき $y = \boxed{\text{ヨ}}$ である。