(2017年度)

1　数　学　問　題　(60分)

(この問題冊子は５ページ，３問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，試験監督者から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**ＨかＦかＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけたりしてはならない。また，マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{ア}$ に7，$\boxed{イ}$ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\square}{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\square}{\square}\sqrt{\square}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\square x^2+\square x+\square$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ (1) 関数

$$f(x)=\left(\log_2 x^2\right)^2+\log_2(6x^4)\quad\left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$$

は, $x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ で最小値 $\log_2\boxed{\text{ウ}}$ をとる。

(2) 方程式 $3x+5y=2$ のすべての整数解 x, y を次で表す。

$$x=a\,k+b,\quad y=c\,k+d\quad (k\text{ は整数})$$

ただし, a,b,c,d は整数の定数で, $a>c$, $|bd|<5$ を満たすものとする。このとき, a,b,c,d は,

$a=\boxed{\text{エ}}$, $b=\boxed{\text{オ}}$, $c=\boxed{\text{カ}}$, $d=\boxed{\text{キ}}$ である。

(3) $\alpha=-1+\sqrt{3}\,i$, $\beta=1+\sqrt{3}\,i$ とする。このとき, 自然数 n に対し

$$\frac{\alpha^{n+2}+2\alpha^{n+1}+4\alpha^n+3\alpha^5+12\alpha^4+12\alpha^3}{\beta^6-2\beta^5+6\beta^4}$$

の値は, $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}+\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,i$ である。

$\boxed{2}$ a, b, cを実数とする。2つの関数

$$f(x) = -x^2 + 4, \qquad g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

を考える。2点 A$(-1, f(-1))$, B$(2, f(2))$ は, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点である。

(1) $b = \boxed{\text{ス}}\,a + \boxed{\text{セ}}$, $c = \boxed{\text{ソ}}\,a + \boxed{\text{タ}}$ である。

(2) $g'(1) = 0$ を満たすとする。このとき, $a = \boxed{\text{チ}}$ である。また, 曲線 $y = g(x)$ 上の点 P$(x, g(x))$ が $-1 < x < 2$ の範囲で動くとき, A, B, P を頂点とする $\triangle$ABP の面積が最大となるのは,

$$x = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

のときである。

(3) $a > 0$ とし, A, B と, 点 Q$(0, g(0))$ を頂点とする $\triangle$ABQ の面積を S_1 とする。このとき, $S_1 = \boxed{\text{ヌ}}\left(a + \boxed{\text{ネ}}\right)$ である。また, Q と B を通る直線を ℓ とし, ℓ と放物線 $y = f(x)$ が囲む図形の面積を S_2 とする。$S_2 - S_1^2$ は, $a = \boxed{\text{ノ}} + \boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$ のとき最小となる。

$\boxed{3}$ さいころを2回投げ，1回目に出た目を m，2回目に出た目を n とする。この m と n を用いて，座標空間に点 $\mathrm{P}(m, n, 0)$ をとる。また，平面 $z=0$ 上において，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x^2 + y^2 < 36$$

(1) P が D に含まれる m と n の組は，$\boxed{\text{フ}}$ 組ある。

(2) 座標空間において，原点を中心とし，半径が6の球Oを考える。$\mathrm{P}(m, n, 0)$ が D に含まれるとき，球Oの球面上に点 $\mathrm{Q}(m, n, a)$ をとり，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とする。ただし，$a > 0$ とする。

(i) $k = m^2 + n^2$ とおくとき，S を k で表すと，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}\,k^2 + \boxed{\text{ホ}}\,k + \boxed{\text{マ}}}$$

である。

(ii) S の最大値 $\boxed{\text{ミ}}$ を与える m と n の組は，$\boxed{\text{ム}}$ 組ある。

(iii) P が D に含まれるときに，$7 \leqq S \leqq \boxed{\text{ミ}}$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$ である。また，P が D に含まれ，さらに $7 \leqq S \leqq \boxed{\text{ミ}}$ であるときに，P について $m + n \geqq 6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。