（2015年度）

4　数　学　問　題（60分）

（この問題冊子は6ページ，3問である。）

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ (1) 数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和 S_n が $3S_n = a_n + 2n - 1$ を満たすならば,

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)^n + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2) t を実数とする。座標空間において, 点 $(2t, 1, -t)$ を通りベクトル $(-1, 2, 1)$ と平行な直線を ℓ とする。点Pの座標を $(0, 2, 0)$ とする。

(i) 点P から ℓ に垂線PHを下ろすとき,

$$\mathrm{PH}^2 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}t^2 + \boxed{\text{ケ}}\,t + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(ii) 点P を中心とする半径2の球面を S とする。S と ℓ が異なる2点で交わるとき, その2点間の距離は $t = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値をとる。

2 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ とし, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ における接線を ℓ とする。ただし, $p \neq 3$ とする。放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ は点 $(3, 0)$ を通り, 直線 ℓ と P で接する。

(1) a, b, c をそれぞれ p の式で表すと,

$$a = \boxed{セ}\,p,\ b = \boxed{ソ}\,p^2 + \boxed{タ}\,p + \boxed{チ},\ c = \boxed{ツ}\,p^2 + \boxed{テ}$$

である。

(2) $\dfrac{1}{2} < p < 3$ とする。C およびその下側の部分で, C と直線 $x = \dfrac{1}{2}$ および x 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とおき, C およびその上側の部分で, C と x 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とおく。このとき,

$$S_1 - S_2 = \frac{25}{24}\left(\boxed{ト}\,p^2 + \boxed{ナ}\,p + \boxed{ニ}\right)$$

であり, $S_1 = S_2$ となる p の値は

$$p = \frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}} + \frac{\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$

である。

(3) $p = 1$ のとき,

$$S_1 + S_2 = \frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$$

である。

3 a を実数とし, $f(x)=(x-a)(x^2-2x-11)$ とおく。集合

$$A=\{x \mid f(x)<0,\ x \text{ は実数}\}$$

を考える。また, n を整数とし, 集合

$$I_n=\{x \mid x>n,\ x \text{ は実数}\}$$
$$J_n=\{x \mid x<n,\ x \text{ は実数}\}$$

を考える。

(1) $a=-4$ のとき, $J_n \supset A$ となる n の最小値は $\boxed{\text{ヘ}}$ であり, $J_n \subset A$ となる n の最大値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

(2) $a=-4, n=-3$ のとき, $I_n \cap A$ に含まれる整数の個数は $\boxed{\text{マ}}$ 個である。

(3) $a=1$ のとき, $I_n \cap A$ が空集合でない n の最大値は $\boxed{\text{ミ}}$ であり, $J_n \subset A$ となる n の最大値は $\boxed{\text{ム}}$ である。

(4) $a=1$ のとき,

$$x<x' \quad \text{かつ} \quad f(x)>m>f(x')$$

を満たす実数 x, x' が存在するような整数 m の最小値は $\boxed{\text{メ}}$, 最大値は $\boxed{\text{モ}}$ である。

(5) $a=7$ のとき, $J_n \supset A$ となる n の最小値は $\boxed{\text{ヤ}}$ であり, $J_n \subset A$ となる n の最大値は $\boxed{\text{ユ}}$ である。