(2015年度)

6　数　学　問　題　(90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと**。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと**。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際，はじめの位の数が0のときも，必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には，解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は，符号欄にマークしない。)

分数は，既約分数で表し，分母は必ず正とする。また，整数を分数のかたちに表すときは，分母を1とする。根号の内は，正の整数であって，2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合，あるいは二つ以上の答が得られる場合には，各位の欄ともＺにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合，－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 $\boxed{\text{ア}}$ に7，$\boxed{\text{イ}}$ に－26をマークする場合。

	符号	10の位											1の位										
	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
ア	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\dfrac{3}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を，$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を，$\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}\,x^2+\boxed{1}\,x+\boxed{0}$ とする。

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{5}{6} < \log_{10} 7 < \dfrac{6}{7}$ であることを用いると, 7^{42} は $\boxed{\text{ア}}$ 桁の整数であることがわかる。さらに, $7^2 < 50$ であることと $\log_{10} 2 > \dfrac{3}{10}$ であることを用いると, $\log_{10} 7 < \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であることがわかり, これより, 7^{41} は $\boxed{\text{エ}}$ 桁の整数であることがわかる。

(2) $\log_{10} 15$ に最も近い値は $\boxed{\text{あ}}$ であり,

$\log_{10} 17$ に最も近い値は $\boxed{\text{い}}$ であり,

$\log_{10} 19$ に最も近い値は $\boxed{\text{う}}$ である。

ただし, 近似値として, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてよい。

$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$ の選択肢 :

(a) 1.13 (b) 1.18 (c) 1.23 (d) 1.28
(e) 1.33 (f) 1.38 (g) 1.43 (h) 1.48

$\boxed{2}$ a を正の実数とし, 関数 $f(x) = \sin x + a \sin 3x$ を考える。

(1) $a = 2$ のとき,

$$f(x) = \boxed{\text{オ}} \sin x + \boxed{\text{カ}} \sin^n x, \quad \text{ただし } n = \boxed{\text{キ}},$$

である。

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が最大値をとるときの a の範囲は

$$0 < a \leqq \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \text{ である。}$$

(3) $a > \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ の範囲で, $f(x)$ の最大値がもっとも小さくなるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \text{ のときである。}$$

このとき $f(x)$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり,

最大値を与える x に対して, $\sin x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

$\boxed{3}$ 実数からなる集合 A, B, C を以下のように定義する。

$$A = \left\{ x \,\middle|\, \sin \frac{\pi}{2} x > -\frac{1}{7} x \right\}$$
$$B = \{ x \,|\, 0 < x < b \}$$
$$C = \{ x \,|\, x \geqq c \}$$

ただし, b, c は正の実数とする。

(1) -1 $\boxed{\text{え}}$ A である。また, 5 $\boxed{\text{お}}$ A である。

> $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ の選択肢：
> (a) $\in$　(b) $\notin$　(c) $\ni$　(d) $\not\ni$　(e) $=$　(f) $\subset$　(g) $\supset$

(2) $B \cap C$ が空集合であるための必要十分条件は $\boxed{\text{か}}$ である。

> $\boxed{\text{か}}$ の選択肢：
> (a) $b = c$　(b) $b < c$　(c) $b \leqq c$　(d) $b > c$
> (e) $b \geqq c$　(f) $b \leqq 1$　(g) $b \leqq 1$ かつ $c \geqq 1$

(3) $A \supset B$ となる b のうち, 整数で最大のものは $\boxed{\text{タ}}$ である。

また, $A \supset C$ となる c のうち, 整数で最小のものは $\boxed{\text{チ}}$ である。

(4) S は実数からなる集合とする。「集合 S が連結である」とは,「S のどの 2 つの要素 x, y に対しても,

条件：実数 z が $x < z < y$ を満たすならば $z \in S$

が成り立つ」ことである。

$A \cap B$ が連結であるような b のうち, 整数で最大のものは $\boxed{\text{ツ}}$ である。また, $A \cap C$ が連結であるような c のうち, 整数で最小のものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{4}$ xyz 空間において, xy 平面上に 4 点

$$A_1(1,0,0),\quad B_1(0,1,0),\quad C_1(-1,0,0),\quad D_1(0,-1,0)$$

を頂点とする正方形 $A_1B_1C_1D_1$ がある。$0<\theta<\pi$ とし, この正方形 $A_1B_1C_1D_1$ を xy 平面上で原点を中心に角 θ だけ回転させた後で z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した正方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする。

動点 P_1, P_2 が, それぞれ点 A_1, A_2 から同時に出発し, 正方形 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ の周上を, 同じ速さで同じ向きに一周する。このとき, 線分 P_1P_2 が動いてできる曲面と正方形 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ とで囲まれる立体を V とする。

(1) 線分 P_1P_2 の長さの最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ト}}+\boxed{\text{ナ}}\,\boxed{\text{き}}}$ であり,

線分 P_1P_2 の長さの最小値は $\sqrt{\boxed{\text{ニ}}+\boxed{\text{ヌ}}\,\boxed{\text{く}}}$ である。

(2) $0<h<2$ とするとき, 平面 $z=h$ による立体 V の断面は, 一辺の長さが

$$\sqrt{\boxed{\text{ネ}}+\left(\boxed{\text{ノ}}\,h^2+\boxed{\text{ハ}}\,h\right)\left(1-\boxed{\text{け}}\right)}$$

の正方形であり, その一辺の長さは $h=\boxed{\text{ヒ}}$ のとき最小である。

(3) 立体 V の体積は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}\boxed{\text{こ}}$ である。

(4) θ が π に限りなく近づくとき, 立体 V の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ に収束する。

$\boxed{き}$ ～ $\boxed{こ}$ の選択肢：

(a) $\sin\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\tan\theta$ (d) $\sin^2\theta$ (e) $\cos\theta\sin\theta$

(f) $\dfrac{1}{\sin\theta}$ (g) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ (h) $\dfrac{1}{\tan\theta}$