(2015年度)

3 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，**HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. **解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。**その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。**消しくずはきれいに取り除くこと。**
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ (1) 座標平面において, 1 次関数 $y = 4x + 2$ が表す直線を ℓ とし, ℓ 上に点 $\mathrm{P}(1, 6)$ をとる。また, 2 次関数 $y = f(x)$ が表す放物線を C とする。

(i) C が点 P で ℓ と接し, かつ C が点 $(0, 1)$ を通るとき,

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 + \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(ii) C が点 P で ℓ と接するとき, C の頂点は直線

$$y = \boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$$

上に存在する。

(2) 複素数 z の虚部を $\mathrm{Im}(z)$ で表すことにする。
2 次方程式 $x^2 - 4x + 9 = 0$ の異なる 2 つの解を α, β とし, $x^2 - 2x + 2 = 0$ の異なる 2 つの解を α', β' とする。ただし, $\mathrm{Im}(\alpha) > \mathrm{Im}(\beta)$ および $\mathrm{Im}(\alpha') > \mathrm{Im}(\beta')$ とする。このとき,
2 数 $\dfrac{\alpha}{\alpha'}, \dfrac{\beta}{\beta'}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは,

$$x^2 + \left(\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)x + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} = 0$$

である。

2 O を原点とする座標空間において, $\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{OB}=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1$ を満たす点 A と点 B を考え, 直線 AB 上に点 P をとる。ただし, $\mathrm{AB}>\mathrm{AP}$ とする。

(1) $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$ のとき, $\mathrm{OP}=\dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ である。

(2) $\triangle\mathrm{OBP}$ が二等辺三角形であるとき,

$$\mathrm{OP}^2=1,\quad \mathrm{AP}=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\sqrt{\boxed{ソ}},$$

または

$$\mathrm{OP}^2=\boxed{タ}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\sqrt{\boxed{テ}},$$

$$\mathrm{AP}=\boxed{ト}+\sqrt{\boxed{ナ}},$$

または

$$\mathrm{OP}^2=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}},\quad \mathrm{AP}=\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}\sqrt{\boxed{ハ}}$$

である。ただし,

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} < \boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} < \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$$

とする。

(3) 座標空間に, $\mathrm{OC}=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ を満たす点 C をとる。3 点 O, A, B の定める平面を α とし, 点 C から平面 α に垂線 CQ を下ろす。このとき,

$\mathrm{CQ}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$ であり, 四面体 OABC の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

3 1個のさいころを2回投げ, 1回目に出た目を m, 2回目に出た目を n とする。ここで, さいころの1から6までのそれぞれの目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

さいころの出た目にもとづいて, 座標平面に3点 $A(0, 1)$, $B\left(\cos\dfrac{n\pi}{m}, \sin\dfrac{n\pi}{m}\right)$, $C(0, -1)$ をとり, $\triangle ABC$ の面積を S とする。ただし, 点Bが点Aまたは点Cと一致する場合は $S = 0$ とする。

(1) S がとりうる値は, 0を含めて全部で $\boxed{\text{マ}}$ 通りある。

(2) S がとりうる値のうち, 小さい方から k 番目の値を s_k とする。

このとき, $s_1 = 0$, $s_2 = \dfrac{\boxed{\text{ミ}} + \sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{\boxed{\text{メ}}}$, $s_4 = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$ である。また, $S = s_2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}$, $S = s_4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ である。